INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# MODUL
# ICT

IQáček

Výuka nadaných

ZŠ Brno, Úvoz 55

Název projektu: **Skupinová výuka mimořádně nadaných dětí na Úvoze II**

Registrační číslo projektu: **CZ.1.07/1.2.17/02.0051**

Autoři: **Mgr. Radek DOLEŽAL, Mgr. Petr HÁJEK, Mgr. Miloš PŘINOSIL**

Následují texty vznikly během realizace projektu Skupinová výuka mimořádných dětí na Úvoze II. Jejich cílem je přiblížit některá témata z oblasti informačních technologií žákům 2. stupně základní školy, zejména práci se stavovým prostorem a základními algoritmy. Snahou autorů bylo zpracovat materiály tak, aby maximálně usnadnily práci pedagoga při přípravě výuky daného tématu. Vzhledem k podrobným komentářům a cvičením s uvedeným řešením však mohou sloužit přímo zájemcům z řad žáků k samostatnému objevování nových poznatků a řešení logických problémů.

S předkládanými materiály může pracovat pedagog v rámci předmětu Informatika stejně jako v jiných technických či přírodovědných předmětech. Jednotlivé kapitoly mohou nalézt uplatnění rovněž v zájmových kroužcích či seminářích, které se věnují řešení netradičních úloh. Některé kapitoly obsahují odkazy na webové aplikace vztahující s k danému tématu, proto je vhodný (ne však nezbytný) přístup k internetu.

# OBSAH

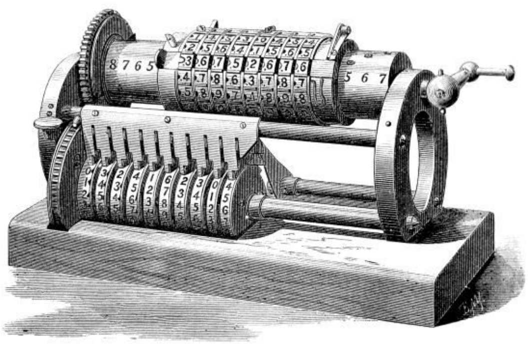
# 1. STAVOVÝ PROSTOR

Logické úlohy, se kterými se ve škole (i mimo ni) setkáváme, mnohdy nejsme schopni na základě dostupných informací vyřešit přímým výpočtem. To však ještě neznamená, že je nelze vyřešit vůbec. Základem úspěchu často bývá systematický popis všech možností (= stavů), které mohou nastat. Množina všech takových stavů společně s přípustnými kroky, kterými lze tyto stavy měnit, vytváří tzv. **stavový prostor.**

Například stavový prostor vyhozené koruny má pouze dva stavy - na minci bude při dopadu buďto panna nebo orel. Stavový prostor vržené kostky má šest stavů atd. Chceme-li pomocí stavového prostoru reprezentovat šachy, bude počátečním stavem výchozí rozložení figurek na šachovnici a množinou koncových stavů např. všechny pozice, ve kterých bílý dává mat. Velikost stavového prostoru je asi $35^{100}$ (průměrně 35 možností v každém tahu, průměrná délka partie 50 tahů), což je vskutku veliké číslo:

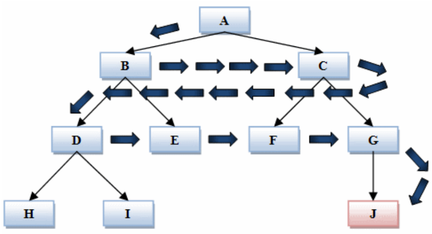
*$35^{100}$ = 25 515 520 672 986 852 924 121 150 151 425 587 630 190 414 488 161 019 324 176 778 440 771 467 258 239 937 365 843 732 987 043 555 789 782 336 195 637 736 653 285 543 297 897 675 074 636 936 187 744 140 625*

Řešíme-li tedy nějakou úlohu, hledáme takovou posloupnost kroků, které nás dovedou od počátečního stavu do koncového při splnění zadaných omezení.

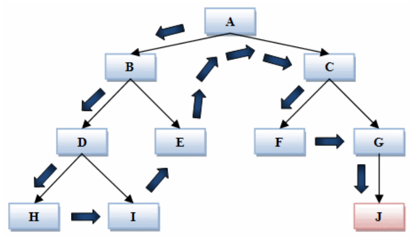


„Strojové“ řešení úloh je jedním ze základních úkolů informatiky. Přestože se výpočetní technika vyvíjí mílovými kroky a vysoký výpočetní výkon, kterými dnešní počítače oplývají, je nesrovnatelný s prvními počítacími stroji, pro naprostou většinu problémů **je zcela nemyslitelné, aby stroj hledal řešení postupným testováním všech možností**. Je nutné hledání nějak efektivně řídit. Stavový prostor totiž může být pro řadu úloh příliš rozsáhlý (viz šachy), v některých případech dokonce nekonečný. Koncové stavy budou tedy od počátečního vzdáleny natolik, že počítač ani nemusí být schopen k žádnému z nich jednoduchými metodami v rozumném čase (a s omezenou operační pamětí) cestu najít.

Informatici proto vytvářejí různé metody (algoritmy) prohledávání stavového prostoru s různými výhodami a nevýhodami. Nelze říci, že některá z metod je jednoznačně lepší než jiná. Záleží vždy na povaze řešené úlohy, požadavcích na řešení a dostupných prostředcích. Někdy je kladen důraz na minimální/maximální/průměrný čas potřebný k vyřešení úlohy danou metodou. Jindy nás zajímá především kvalita získaných výsledků , tzn. zda je daná metoda úplná (nalezne řešení vždy, když existuje), optimální (nalezené řešení je nejlepší ze všech) apod. Mezi základní metody prohledávání stavového prostoru patří metoda prohledávání do hloubky a metoda prohledávání do šířky.




Při prohledávání do hloubky jsou postupně procházeny stavy určitého směru. V případě nenalezení koncového stavu v daném směru je nutné se vrátit, přičemž se pokračuje tak dlouho, dokud se nenalezne koncový stav.




Jinak je tomu u prohledávání stavového prostoru metodou do šířky, kdy jsou postupně (po vrstvách) procházeny stavy téže hloubky. Hloubka stavu představuje číslo udávající počet kroků nutných k přechodu z daného stavu do stavu počátečního.

Rychlost nalezení koncového stavu je v případě druhé metody nižší. Je totiž zapotřebí projít minimálně všechny stavy s hloubkou menší než je hloubka stavu koncového. Hlavní výhodou této metody je však jistota, že koncový stav bude skutečně nalezen. U prohledávání do šířky k navrácení nedochází a každý stav je tedy navštíven maximálně jednou.

Následující kapitoly s prohledáváním stavového prostoru úzce souvisí. Přestože v úlohách většinou není strategie hledání optimální cesty explicitně popisována, téměř vždy se řešení točí okolo popisu možných stavů a zkoumaní vhodných přechodů mezi nimi.

Použité zdroje:

Webový průvodce světem expertních systémů: Stavový prostor [online]. Petr Faruzel, ©2007 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://faruzel.borec.cz/120.html

Použité obrázky:

Free Pair of White Dice Clip Art [online]. ©2013 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: https://openclipart.org/detail/181461/dice,%20%C3%85%C2%BEaidim%C3%85%C2%B3%20kauliukas,%20lo%C3%85%C2%A1im%C3%85%C2%B3,%20games
Grant mechanical calculating machine 1877 [online]. ©2013 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Calculator
Metoda prohledávání do hloubky [online]. ©2007 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://faruzel.borec.cz/120.html
Metoda prohledávání do hloubky [online]. ©2007 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://faruzel.borec.cz/120.html

# 2. ŘEKY A MOSTY

## 2.1 PŘEVOZ PŘES ŘEKU

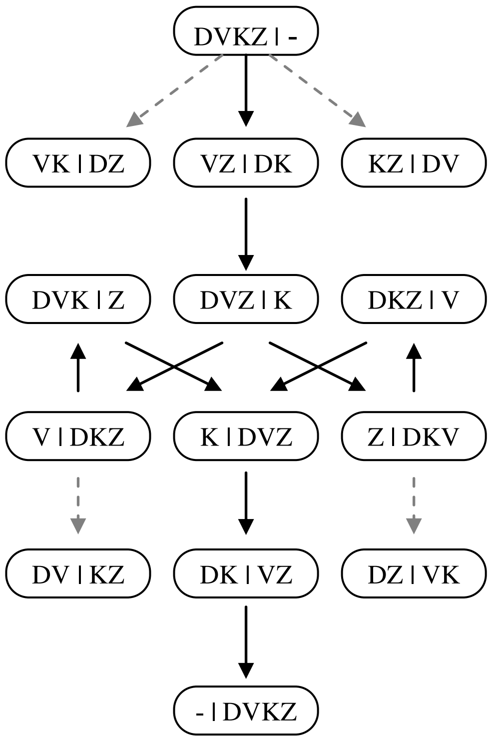
Některé složité úlohy se díky informatice dají řešit „strojově“, tzn. pomocí počítače. Je však nutné nejprve vytvořit vhodný algoritmus, neboli návod, který stanovuje jednotlivé kroky, podle kterých se musí v konkrétní situaci postupovat. Jak takový algoritmus vypadá? Ukážeme si to na známé úloze.

VLK, KOZA A ZELÍ

Dědeček se vrací z trhu domů. Má s sebou kozu, vlka a v ruce hlávku zelí. Přijde k řece, kde má přivázanou loďku, a chce se dostat na druhý břeh. Ovšem do malé loďky se spolu s ním vejde jen jedno zvíře nebo zelí. A navíc - když nechá vlka samotného s kozou na břehu, vlk kozu sní. A když nechá samotnou kozu se zelím, tak koza sežere zelí. Jak dostane dědeček vlka, kozu i zelí na druhou stranu?

Odkaz na online aplikaci: http://www.plastelina.net/game1.html

Podstatou algoritmu je popis všech možných stavů, tzn. rozmístění „účastníků“ úlohy na jednom či druhém břehu, a současně nalezení jejich vhodného propojení:




● Výchozí stav je ten, kdy jsou všichni na jednom (levém) břehu.

● Z něj je možné přejít do tří různých stavů, ovšem pouze z jednoho z nich lze pokračovat dále. Na levém břehu zůstává vlk a zelí, dědeček převáží nejprve kozu.

● Po návratu má dědeček možnosti dvě – vzít zelí nebo vlka. V obou případech však na pravém břehu dědeček naloží opět kozu – aby nesežrala zelí nebo nebyla sežrána vlkem. **Tato na první pohled „neintuitivní“ změna stavu bývá v těchto úlohách často klíčová.**

● Na levém břehu dědeček kozu vymění za vlka nebo zelí (podle toho, kterou možnost si vybral dříve).

● Na pravý břeh se tak dostává „neškodná“ kombinace vlka se zelím. Dědeček se tak může v klidu vrátit na levý břeh pro kozu.

● Konečného stavu je dosaženo, všichni jsou na pravém břehu.

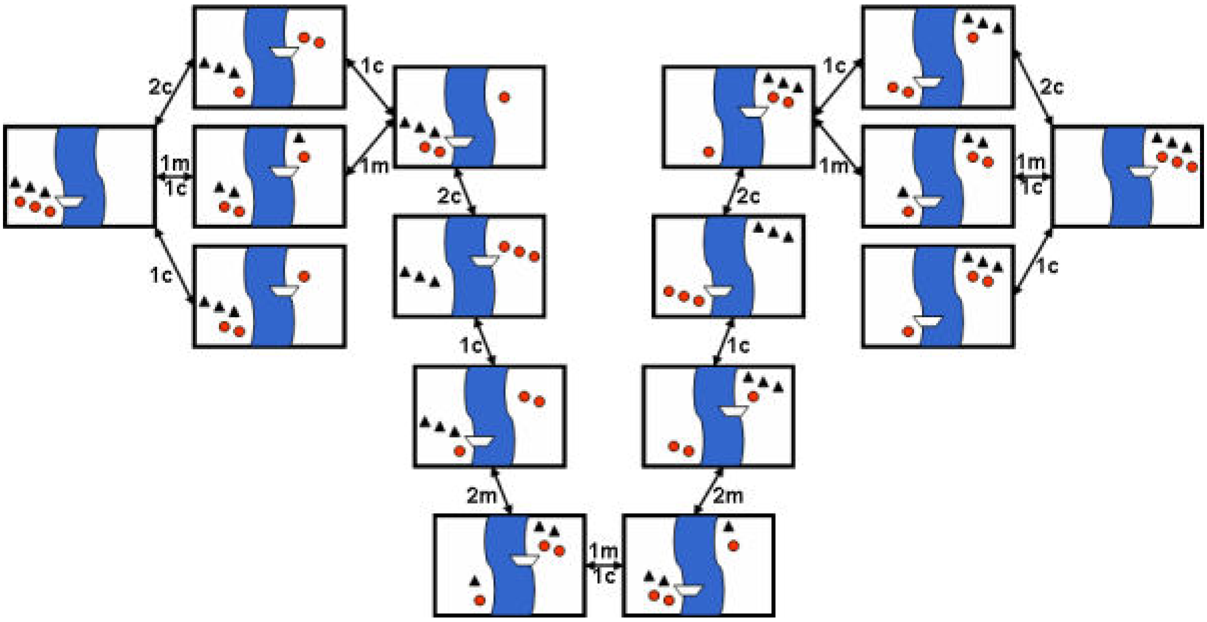
Jak je ze schématu vidět, počet všech možných stavů není zase tolik vysoký. Díky neintuitivnosti některých tahů však může přesto být řešení zdánlivě jednoduché úlohy poměrně náročné. Je potřeba uvažovat „velkoryse“ a připustit např. návrat někoho, kdo už na druhém břehu je apod.

## KANIBALOVÉ A MISIONÁŘI

Tři misionáři se vydali na misie do nitra neznámého ostrova. Za průvodce si s sebou vzali tři tamní kanibaly. Potřebují překonat řeku, ovšem loďka uveze nejvýše dva lidi. Bohužel kanibalové nejsou zatím dostatečně přesvědčeni o poslání misionářů, takže pokud se kdykoli vyskytne na jednom místě více kanibalů než misionářů, budou misionáři snězení. Jinak však kanibalové spolupracují a udělají, co jim misionáři řeknou. Jak se může celá skupina dostat na druhý břeh?

Odkaz na online aplikaci: [http://www.plastelina.net/game2.html](http://www.plastelina.net/game2.html)

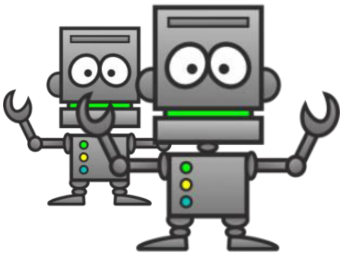
Schéma popisující všechny možné stavy a jejich optimální propojení je následující:




Nejprve je třeba dostat na pravý břeh jednoho kanibala (možnosti jsou dvě). Poté k němu musí misionáři dostat dalšího, ovšem samotný misionář už by čelil přesile. Proto vyšlou misionáři na pravý břeh oba zbývající kanibaly, přičemž jeden z nich se vrátí. Pak teprve na pravý břeh dojedou dva misionáři. Síly jsou vyrovnané, ovšem aby to tak zůstalo nadále, musí se vrátit jeden misionář a jeden kanibal. Od této chvíle jsou všechny přejezdy „symetricky opačné“. Na pravý břeh vyrazí dva misionáři, takže na pravém břehu budou všichni a navíc jeden kanibal. Ten postupně přiveze ostatní s tím, že poslední přejezd může opět uskutečnit jak misionář, tak kanibal.

**V případě, kdy je celkový počet možných stavů výrazně vyšší, je hledání optimální cesty mnohem komplikovanější a výpočetní technika je potom nenahraditelná.** I k řešení následujících úloh lze podobné algoritmy sestavit, ovšem v těchto případech bude jistě zábavnější pustit se do řešení přímo. Předchozí úlohy nás na to jistě dostatečně připravily…

ROBOTI



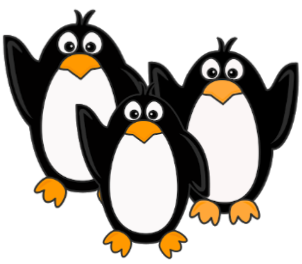
Na břehu se sešli čtyři roboti – dva velcí a dva malí. K převozu na druhou stranu řeky je jim k dispozici loďka. Do ní se však všichni naráz nevejdou. Zjistili, že do loďky mohou nasednout maximálně dva malí roboti nebo jeden velký. Dostanou se všichni na druhý břeh?

Odkaz na online aplikaci:
http://www.transum.org/software/River_Crossing/Level2.asp

ŽÁRLIVÍ MANŽELÉ

Tři novomanželské páry vyrazily na společný výlet. Během něj se dostanou k řece, kterou mohou překonat jen s pomocí loďky, do níž se vejdou nejvýše dva lidé. Všichni muži jsou však velmi žárliví. Žádný nechce nikdy nechat svou ženu ve společnosti dalšího muže bez svého dozoru (a to ani kdyby u toho byli jiní lidé). Mohou se všichni dostat na druhý břeh bez žárlivých scén?

TUČŇÁCI



Tři dospělí tučňáci a jejich mláďata se chtějí dostat přes řeku. K dispozici jim je kra, na kterou se vejdou vždy pouze dva z celé skupiny. Situaci však komplikuje fakt, že mláďata jsou velmi bázlivá. Každé odletí v okamžiku, když zůstane na břehu (nebo na kře) bez svého rodiče v přítomnosti ostatních dospělých. Mohou všichni přeplout na druhý břeh?

Odkaz na online aplikaci:
http://www.novelgames.com/en/spgames/penguins/

NEOBVYKLÁ SESTAVA

Tentokrát dorazila k řece opravdu zvláštní sestava: otec, matka, dva synové, dvě dcery, policista a zloděj. K dispozici je opět loď, která uveze dvě osoby. Navíc máme celou řadu omezení:

- Otec nemůže být sám ani s jednou dcerou bez přítomnosti matky.
- Matka nemůže být sama ani s jedním synem bez přítomnosti otce.
- Zloděj nesmí být s nikým z příslušníků rodiny bez přítomnosti policisty.
- Pouze otec, matka a policista umí pádlovat.

Jak se všichni při splnění zadaných podmínek dostanou na druhou stranu?

Odkaz na online aplikaci:
http://www.giga-hry.cz/River-Game:-IQ-test-hra

Odkaz na podobnou aplikaci:
http://www.smart-kit.com/s888/river-crossing-puzzle-hard/

## 2.2 PŘECHOD PŘES MOST

Podobným typem úloh jsou tzv. „přechody ve tmě". V nich je řeka a loďka nahrazena (většinou) mostem a svítilnou. Způsobů, jak dostat skupinu osob z jedné strany mostu na druhou, je zpravidla mnoho. Problémem však bývá nalézt optimální řešení, při kterém se všechny osoby dostanou na druhou stranu mostu co nejrychleji.

KLASICKÁ VERZE ÚLOHY O MOSTU A LUCERNĚ má následující znění:

*Čtyři lidé stojí na jedné straně mostu. Je noc a oni se chtějí dostat na druhou stranu. K dispozici mají pouze jednu lucernu, kterou je třeba svítit při každé cestě tam i zpátky. Po mostě mohou jít vždy maximálně dvě osoby současně, přičemž každá z nich jde jinou rychlostí. První osoba přejde most za 1 minutu, druhá za 2 minuty, třetí za 5 minut a čtvrté osobě trvá přechod mostu 10 minut. Jaké je optimální pořadí, ve kterém by se měla skupina přes most vydat?*

Intuice nám říká, že nejlepší bude takové řešení, kdy nejrychlejší osoba dovede na druhou stranu mostu všechny ostatní, přičemž pokaždé se s lucernou vrátí. Schematicky lze toto řešení zapsat následovně:

$$+\{1,2\} - 1 + \{1,3\} - 1 + \{1,4\}.$$

Protože každá dvojice jde rychlostí toho pomalejšího, je celkový čas přechodu všech osob roven

$$t_2 + t_1 + t_3 + t_1 + t_4 = 2 + 1 + 5 + 1 + 10 = 19 \text{ minut}.$$

Kouzlo této úlohy však spočívá v tom, že uvedené řešení není nejrychlejší. Existuje totiž takové pořadí, při kterém stačí na přechod všech osob 17 minut. K tomuto optimálnímu řešení by nás měla dovést myšlenka, že obě nejpomalejší osoby by měli jít přes most společně. Jejich přechod se tak stihne za čas toho pomalejšího. Ovšem pokud by tato dvojice šla první, znamenalo by to, že jedna z nich by šla přes most celkem třikrát. Musí se totiž vrátit s lucernou k ostatním:

$$+\{3,4\} - 3 + \ldots \qquad \text{nebo} \qquad \{3,4\} - 4 + \ldots$$

Nejlepší tedy bude, když tato dvojice půjde až poté, co na druhé straně bude už čekat jiná osoba. Ta se vrátí s lucernou v rychlejším čase. Takže pro pořadí

$$+\{1,2\} - 1 + \{3,4\} - 2 + \{1,2\}$$

dostáváme celkový čas

$$t_2 + t_1 + t_4 + t_2 + t_2 = 17 \text{ minut}.$$

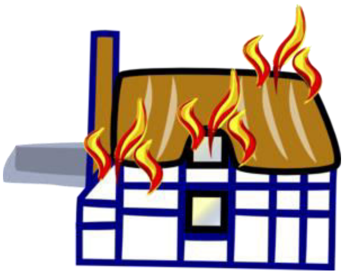
Na následujících odkazech a úlohách si můžeme podobnou situaci zopakovat. Vždy jde o nalezení optimálního (= nejrychlejšího) řešení:

http://darahardsums.uktv.co.uk/games/s2_ep_07.php
http://nrich.maths.org/5916

ZRANĚNÍ VOJÁCI

Na jedné straně rokle jsou čtyři ranění vojáci. Je tma a provazový most napříč roklí je rozbitý, takže po něm mohou přejít nanejvýš dva současně. Potřebují k tomu svítilnu, kterou ovšem mají pouze jednu. Každý má jiné zranění, takže přechod mostu trvá každému jinou dobu: **5** min, **10** min, **20** min a **25** min. Pokud jdou dva společně, jdou samozřejmě tempem pomalejšího. V jakém pořadí se mají vojáci přes most vydat, aby celkový čas byl co nejmenší? Mohou to zvládnout do jedné hodiny?

HOŘÍCÍ DŮM



Skupina přátel uvízla v hořícím domě, který za 12 minut spadne. Aby se zachránili musí proběhnout chodbou, která je celá v plamenech. Pokud přes ni chce někdo projít, musí mít u sebe hasící přístroj a plameny alespoň trochu krotit. Problém je, že přátelé mají jen jeden. Navíc chodbou mohou jít zároveň maximálně dva lidé. Pak se někdo musí vrátit s přístrojem a mohou jít další dva.
Ve skupině je jeden hasič, který se v plamenech pohybuje běžně, a tak dokáže chodbou proběhnout během jedné minuty. Jeho kamarád je zdatný sportovec a k úniku potřebuje minuty dvě. Sestra sportovce je velice vystrašená a cesta chodbou jí trvá čtyři minuty. Čtvrtý z přátel má naneštěstí nohu v sádře a chodí o berlích, takže skrz chodbou projde za pět minut. Mohou se všichni čtyři dostat z hořícího domu dříve než spadne?

TURISTÉ

Při návštěvě přírodní rezervace se ztratila skupina pěti turistů. Už se setmělo, když dorazili k místu, odkud byla vidět jejich výletní loď. Ovšem v cestě jim stál hluboký příkop, přes který byl položen kmen stromu. Rozhodli se po něm přejít na druhou stranu, i když už měli pouze jednu funkční lucernu, kterou si museli svítit na cestu. A protože kmen byl úzký, nechtěli riskovat a dohodli se, že po něm budou přecházet maximálně ve dvou. Nejrychlejší z nich byl mladík, který přechod po kmeni zvládl za **1** minutu. Jeho kamarád byl také obratný a na druhou stranu přešel za **3** minuty. Dáma na podpatcích měla s přechodem problém a opatrnou chůzí dokázala přejít po kmeni za **6** minut. Zahraniční turista s mírnou nadváhou se na druhou stranu dostal až po **8** minutách. Ovšem nejpomalejší byl stařík s holí, který se po kmeni šoural celých **12** minut. Přechod jim trval celkem 32 minut a když poté konečně došli k přístavišti, zjistili, že jim loď odplula před dvěma minutami. Bylo možné zvolit strategii přechodu kmenu tak, aby odjezd nezmeškali?

Odkaz na online aplikaci:
http://www.plastelina.net/game3.html

**Poznámka na závěr:**

Určit nejrychlejší čas potřebný pro přechod mostu s lucernou v obecném případě je možné pomocí jednoho univerzálního vzorce. Stačí jen znát počet osob a jejich časy. Tento vzorec je však poněkud složitý…

$$\min\{C_0, C_1, \ldots, C_{\lfloor N/2\rfloor -1}\},$$

$$C_k = (N-2-k)t_1 + (2k+1)t_2 + \sum_{i=3}^{N} t_i - \sum_{i=1}^{k} t_{N+1-2i}.$$

Rychlejší způsob, jak zjistit optimální řešení konkrétní úlohy typu „mostu a lucerny“ nabízí webová adresa http://www.moshe-online.com/tutor/bridge/torch_frame.html. Zde je možné nastavit libovolný počet osob a jejich časy, ale i kapacitu mostu. Poté může každý hledat optimální řešení sám nebo si jej může nechat spočítat ☺

## Použité zdroje:

PELÁNEK, Radek. *Jak to vyřešit?: logické úlohy a hry*. Vyd. 1. Praha: Portál, 2011, 158 s. ISBN 978-80-7367-872-2.

ROTE, Günter. *Crossing the bridge at night*. Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science 78, 2002, pp. 241–246.

## Použité obrázky:

Zelí, koza a vlk [online]. ©2000 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://img.blesk.cz/static/old_abc/abctisk/45/12/19441.jpg
Cannibal [online]. ©2008 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://stooryduster.co.uk/comics-archive/2008-04-11-cannibal.jpg
Search-space for the Missionaries and Cannibals problem [online]. [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://www.aiai.ed.ac.uk/~gwickler/missionaries.html
Free Cute Little Robot Clip Art [online]. [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://www.clipartlord.com/free-cute-robot-clip-art/
Penquin [online]. ©2013 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://classroomclipart.blogspot.cz/2013/06/penguin-clipart.html
Couples [online]. [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://thumbs.gograph.com/gg64234042.jpg
http://thumbs.gograph.com/gg64234043.jpg
http://thumbs.gograph.com/gg64234040.jpg
River [online]. ©2014 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://www.clipartpanda.com/clipart_images/river-clipart-5-100x133-5017544
Storm Lantern [online]. ©2010 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://clubpenguin.wikia.com/wiki/Storm_Lantern
Wooden Bridge [online]. [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://fumar-porros.deviantart.com/art/Wooden-Bridge-4-A-Suspension-Bridge-4-A-PNG-367806705
Fire In House [online]. ©2012 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://www.clker.com/clipart-fire-in-house.html
Tourist [online]. [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://www.webweaver.nu/clipart/travel.shtml

# 3. VÁŽENÍ, MĚŘENÍ, PŘELÉVÁNÍ

Následující skupiny úloh nemají s měřením fyzikálních veličin - jak by se mohlo z názvu zdát - nic společného. Jde v nich spíše o logické úvahy a hledání obecných principů, které se v daných případech dají efektivně použít a jsou uplatnitelné i ve zcela nečekaných situacích…

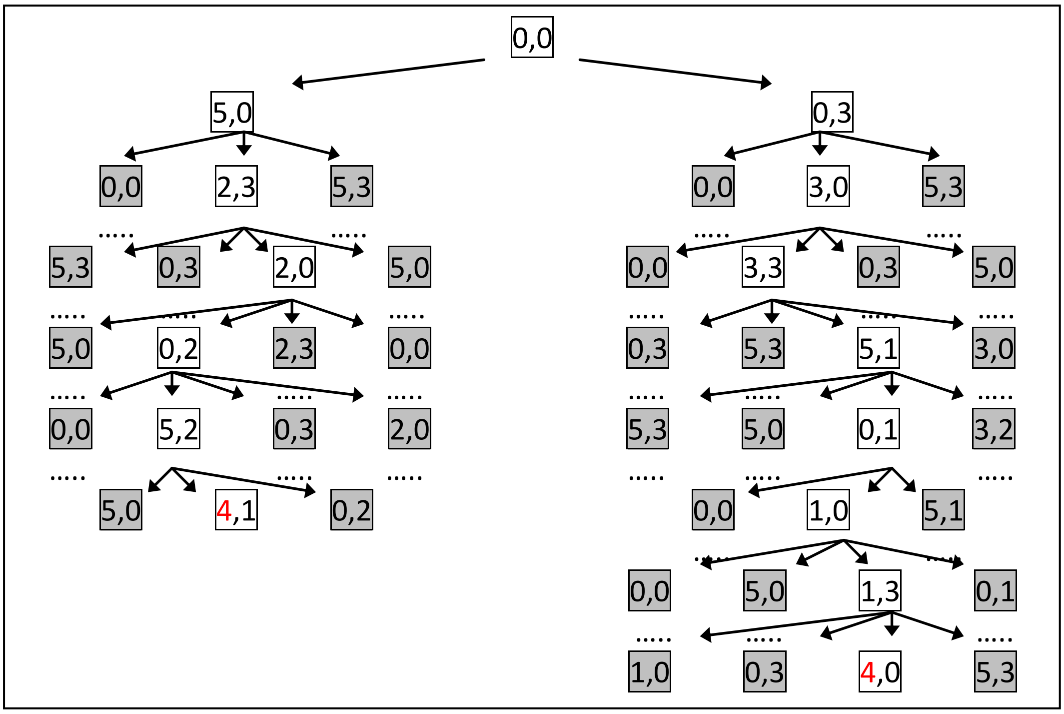
## 3.1 PŘELÉVÁNÍ NÁDOB

Ve třetím díle akční série Smrtonosná past musel hlavní hrdina Bruce Willis - coby neohrožený policista John McClane – vyřešit zapeklitou situaci. Zneškodnit výbušný systém umístěný ve fontáně městského parku. Stačilo přitom položit na váhu nádobu naplněnou čtyřmi litry vody. Ovšem k dispozici mu byla pouze nádoba třílitrová a pětilitrová. A samozřejmě omezený čas. Nezáviděníhodná situace. Avšak hlavní hrdina kromě svalů prokázal i důvtip a na váhu nakonec položil větší nádobu s požadovanými čtyřmi litry – samozřejmě jen těsně před uplynutím vymezeného času. Jak to dokázal?

Situaci si můžeme vyzkoušet zde:
http://www.interactive-maths.com/decanting-puzzle.html

Možností je více a dřív nebo později se to systémem náhodného přelévání podaří každému. Jak ale najít co nejrychlejší způsob? Ukážeme si to názorně pomocí rozboru tzv. stavového prostoru, ve kterém nalezneme nejkratší cestu:

0. krok:
1. krok:
2. krok:
3. krok:
4. krok:
5. krok:
6. krok:
7. krok:
8. krok



Ze zjednodušeného schématu, který popisuje všechny možnosti (naplnění, přelití, vylití), jsou patrná dvě řešení:

1) Naplním pětilitrovou nádobu a rovnou z ní přeliji vodu do třílitrové. Mám tedy plnou třílitrovou a dva litry v pětilitrové. Třílitrovou vyliji. Dva litry z pětilitrové přeliji do třílitrové. Doplním pětilitrovou. Mám tedy 5l v pětilitrové a 2l v třílitrové. Z pětilitrové doliji zbývající litr do třílitrové a zůstanou mi v ní právě 4 litry.

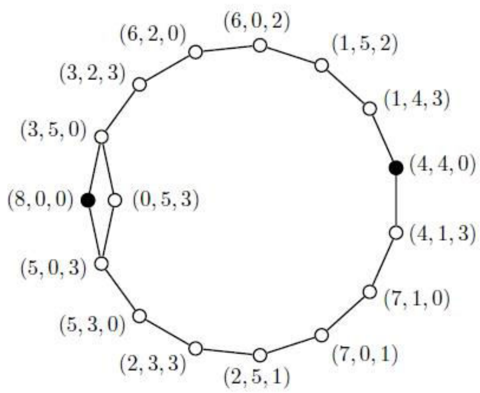
2) Naplním třílitrovou nádobu a rovnou z ní přeliji vodu do pětilitrové. Znovu naplním třílitrovou a přeliji do pětilitrové. Teď mám plnou pětilitrovou a 1l v třílitrové. Pětilitrovou vyliji a přeliji do ní 1l z třílitrové. Třílitrovou znovu naplním a přeliji vodu do pětilitrové, v které nyní mám 1+3=4 litry vody.

Vidíme, že nejkratší řešení (v 6 krocích) je to, které začíná naplněním větší nádoby a jejím postupným rozléváním. Tato strategie bývá úspěšná i v ostatních příkladech.

2. varianta

**Jak se změní úloha, pokud již nebudeme mít neomezené množství vody, ale pouze jednu plnou osmilitrovou nádobu a budeme chtít odměřit dvakrát 4 litry?**

Jiný typ schématu, který názorně ukazuje postup optimálního přelévání, je na následujícím obrázku. Řešení z něj snadno vyčteme:




| | 8 5 3 |
|---|---|
| 1) 8 -> 5 | 3 5 0 |
| 2) 5 -> 3 | 3 2 3 |
| 3) 3 -> 8 | 6 2 0 |
| 4) 5 -> 3 | 6 0 2 |
| 5) 8 -> 5 | 1 5 2 |
| 6) 5 -> 3 | 1 4 3 |
| 7) 3 -> 8 | 4 4 0 |

Existuje jiné řešení?
Kolik je k němu potřeba přelití?

3. varianta

**Mějme nádobu o objemu 8 litrů a v ní 5 litrů vody, potom nádobu o objemu 5 litrů a v ní 3 litry vody a nakonec nádobu o objemu 3 litry a v ní 2 litry vody. Dokážeme odměřit 1 litr, pokud smíme přelévat pouze dvakrát?**

Stačí si situaci dobře zapsat, případně zakreslit. Řešení spočívá v tom, že z nádoby (8/5) doplníme nádobu (3/2). Dostaneme po prvním přelití nádoby (8/4), (5/3) a (3/3). Nyní už jen doplníme prostřední nádobu vodou z nejmenší nádoby a máme v ní odměřený jeden litr vody. Schematicky zapsáno:

| | 8 5 3 |
|---|---|
| 0) | 5 3 2 |
| 1) | 4 3 3 |
| 2) | 4 5 1 |

Další příklady následují. U všech platí stejná pravidla (množství vody nelze pouze odhadnout, k dispozici není žádná odměrka ani jiná nádoba, zadaný objem musí být vždy zachován):

**1) Máme dvě nádoby - na 9 litrů a na 4 litry. Úkolem je odměřit 6 litrů s minimálním počtem přelití.**

**2) K dispozici jsou tři nádoby: 7, 4 a 3 litry. Sedmilitrová je plná. Je třeba rozdělit tekutinu na tři části – dvakrát dva litry a jednou tři litry .**

**3) Máme dvě prázdné nádoby (7-litrovou a 11-litrovou) a neomezené množství vody. Úkolem je odměřit 6 litrů.**

**4) Máme čtyři nádoby s objemy 2, 4, 5 a 9 litrů, přičemž největší z nich je plná vody. Rozdělte ji pomocí těchto nádob na tři stejné části.**

**5) Maminka má tři nemocné děti. Z lékárny si přinesla medicínu v lahvičce s objemem 24 ml a každému z dětí potřebuje odměřit 8 ml. Doma však našla pouze nádobky s objemy 5, 11 a 13 ml. Podaří se jí medicínu rozdělit na tři stejné dávky?**

**6) Máme tři koše a v nich 6, 9 a 21 jablek. Je možné rozdělit všechny jablka do košů rovnoměrně, pokud však můžeme vždy jen zdvojnásobit počet jablek v daném koši? Je možné to zvládnout ve třech krocích? A ve dvou?**

**7) Vinař měl 12-litrový sud s vínem a chtěl obdarovat známého jednou polovinou. Jeho přítel však měl s sebou jen 5-litrový džbán a 8-litrový plastový barel. Může vinař potřebných 6 litrů odměřit?**

**8) Máme k dispozici čtyři nádoby o objemech 6, 11, 14 a 27 litrů. Poslední z nich je plná vody. Úkolem je rozdělit tento objem na tři stejné části.**

**9) Máme jeden 7-litrový, jeden 9-litrový kbelík a sud s vodou. Je možné odměřit 10 litrů rozdělených do obou kbelíků tak, aby na konci byl plný a) 7-litrový kbelík, b) 9-litrový kbelík?**

Získávání stanovených objemů přeléváním různě velkých nádob je možné vyzkoušet zde:
[http://pbskids.org/cyberchase/math-games/pour-score/](http://pbskids.org/cyberchase/math-games/pour-score/)

## 3.2 MĚŘENÍ ČASU

Podobně jako v předchozích úlohách můžeme přelévat i čas. A to nejen obrazně ☺ Pomocí dvou přesýpacích hodin (např. **7 minut** a **4 minuty**) lze totiž určit mnohem více časových intervalů, než je pouze doba, za kterou se písek zcela přesype v jedněch či druhých hodinách.

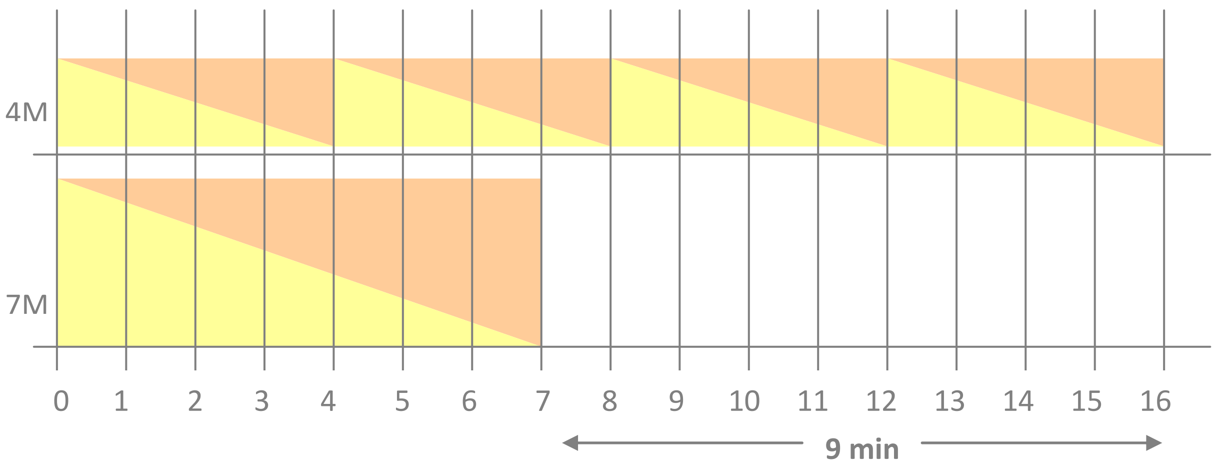
- celkové časy můžeme např. jednoduše sčítat (po přesypání jedněch vždy otočíme druhé); můžeme tak snadno odměřit např. **8, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19 min atd**.

- různé časové intervaly můžeme dostat také odčítáním (určením rozdílu mezi hodinami, které se právě přesypaly a těmi, které ještě „dobíhají“); např.pokud obrátíme oboje hodiny naráz, po přesypání 4-minutových zbývají do úplného přesypání 7-minutových hodin **3 minuty**; pokud přesypeme 4-minutové hodiny dvakrát za sebou, bude rozdíl činit **1 minutu** atd.

- můžeme však také počítat čas „odzadu“, tzn. určit čas, který se ještě nepřesypal a následně hodiny otočit „předčasně“

Jak je vidět, s vícero hodinami se dá odměřit mnoho různých časových úseků. Ukažme si, jak v případě 7-minutových a 4-minutových hodin odměřit 9 minut:

Jak jsme již naznačili, požadovaného času je možné dosáhnout vhodnou kombinací časových intervalů, které můžeme dostat při současném přesýpání obou hodin. Pokud tedy necháme přesypat písek ve 4-minutových hodinách dvakrát za sebou, bude rozdíl oproti 7-minutovým hodinám činit 1 minutu. K té pak můžeme přidat dvakrát 4 minuty, viz obrázek:

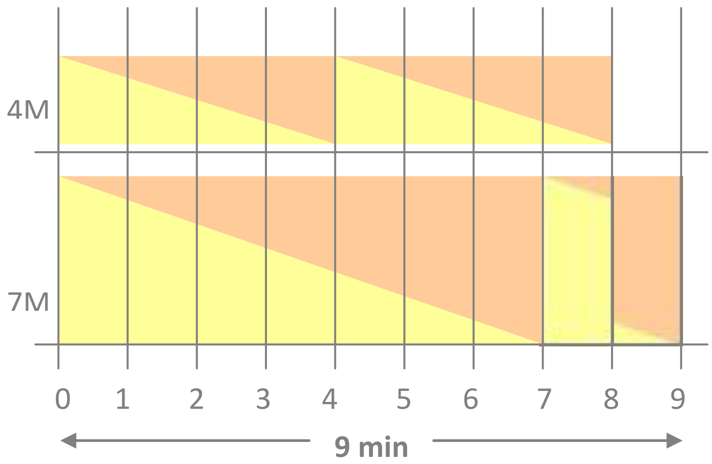



Jak vidíme, k odměření 9 minut je celkem třeba 16 minut.
Neexistuje však lepší (=rychlejší) řešení? Jistě můžeme lépe využít počátečních 7 minut …

Můžeme postupovat následovně:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***0:*** | *7* | *4* | *Na začátku otočíme oboje hodiny naráz.* |
| ***4:*** | *3* | *0->4* | *Po čtyřech minutách, kdy se menší hodiny přesypou, je znovu otočíme. Na těch větších zbývají 3 minuty.* |
| ***7:*** | *0->7* | *1* | *Po těchto 3 minutách otočíme větší hodiny, přitom na menších zbývá 1 minuta.* |
| ***8:*** | *6->1* | *0* | *Po 1 minutě, kdy se zcela přesypou menší hodiny, se na větších hodinách přesypala rovněž 1 minuta (a zbývá jich tudíž 6). Otočíme tedy větší hodiny, aby se jedna minuta „odměřila znovu“.* |
| ***9:*** | *0* | | *Požadovaný čas tak dostáváme jakou součet 4 + 3 + 1 + 1 = 9 minut.* |

Schematicky uvedené řešení vypadá takto:




**10) Učitel matematiky píše s žáky dva druhy testů. Jeden orientační na 15 minut a jeden důkladný v délce 24 minut. Nemá hodinky, ale od kolegy fyzikáře si vždy vypůjčí dvoje přesýpací hodiny. Jedny se přesypou za 7 minut a ty druhé za 11 minut. Jak pan učitel pomocí těchto hodin dokáže přesně odměřit časy potřebné pro oba druhy testů?**

Tuto úlohu je možné řešit online pomocí následující aplikace
http://www.novelgames.com/en/spgames/hourglasses/

*V následujících dvou úlohách se rovněž pracuje s časovými intervaly, ovšem poněkud jinak.*

**11) Potřebujeme si opéct tři topinky, ale máme málo času. Na pánev se vejdou jenom dva krajíce najednou a opečení topinky po jedné straně trvá 5 minut. Jak nejrychleji to jde stihnout?**

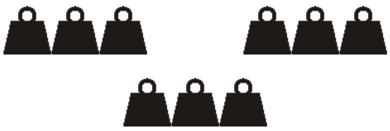
**12) Máme dva provazy. Každý z nich hoří hodinu. Hoří však nerovnoměrně, tzn. že půlka může shořet během dvaceti minut a druhá hořet minut čtyřicet. K tomu máme krabičku zápalek. Je možné odměřit přesně čtvrt hodiny?**

## 3.3 VÁŽENÍ MINCÍ

Dalším typem jsou tzv. úlohy na vážení mincí. Jejich cílem je pomocí rovnoramenných vah najít ve skupině objektů jeden, který se liší svou hmotností. Řešení takových problémů mohou být snadná, ale i poměrně obtížná – to zejména v těch případech, kdy nevíme, zda je odlišný objekt lehčí nebo těžší než ostatní. Obě varianty si nyní ukážeme.

**Máme 9 stejných závaží, ovšem jedno z nich pochází z jiné výrobní sady a je o něco těžší než ostatní. Jak můžeme pomocí rovnoramenných vah co nejrychleji zjistit, které závaží to je?**

Můžeme samozřejmě každá dvě závaží vzájemně porovnat a nejpozději při čtvrtém vážení těžší závaží nalezneme. K jeho jednoznačnému určení však stačí pouze 2 vážení.



Rozdělíme závaží do skupin po třech. Jestliže jedno závaží je těžší než všechna ostatní, musí být těžší i skupina, která toto závaží obsahuje. Porovnáme-li tedy na vahách libovolné dvě trojice závaží, zjistíme hned při prvním vážení, která trojice těžší závaží obsahuje. Misky vah totiž buď zůstanou v rovnováze (a těžší závaží je tedy v té nevážené skupině) nebo jedna miska poklesne (a těžší závaží je tedy na ní). Když postup zopakujeme již jen pro tuto trojici, odhalíme hledané závaží při druhém vážení.

Doplňující otázky: Kolik vážení je třeba v případě 27 závaží? A v případě 81 závaží? Kolik mincí můžeme takto ověřit, když máme dovoleno vážit pětkrát?

**Nyní máme 12 mincí a jedna z nich je falešná. Stačí nám tři vážení, abychom ji určili?**

Mince se očíslujeme (1 – 12). Pak trojí vážení může vypadat takto:

| | | |
|---|---|---|
| Rozdělíme mince na poloviny. | Poloviny rozdělíme a vzájemně prohodíme. Najdeme tak odlišnou čtvrtinu. | Porovnáme mince z odlišné čtvrtiny (po jedné na obou miskách a jedna mimo). |
| 1-6 7-12 | 1-3,7-9 4-6,10-12 | 10 11 12 |
|  |  |  |

Tento postup však předpokládá, že víme dopředu, zda je falešná mince těžší (viz obrázky) nebo lehčí. Ve druhém případě by totiž v naší situaci byla falešná jedna z mincí 1-3.

Najít pomocí minimálního počtu vážení mezi mincemi jednu falešnou a ještě rozhodnout, zda je lehčí nebo těžší než ostatní je (zvlášť při větším počtu mincí) obtížný problém. Ověřit si to můžeme online pomocí následující ho odkazu:
http://www.primarygames.com/math/coinweighing/

Postupovat můžeme následovně:
Nejprve rozdělíme mince na tři skupiny po čtyřech a dvě položíme na váhy. Jsou 2 možnosti:

Levá strana je těžší, takže falešná mince je na vahách. Na stole jsou pravé mince.

Váhy jsou v rovnováze, takže mince na nich jsou pravé. Falešná mince je na stole.

Označíme si mince následovně:
**T1-T4 – mince na těžší straně**,
**L1-L4 – mince na lehčí straně**,
**S1-S4 – (pravé) mince na stole**.
Víme, že falešná mince je buď těžší a je to jedna z T1-T4 nebo je lehčí a pak je to jedna z L1-L4. Provedeme tedy druhé vážení takto:
**T1,T2,L1,L2 a T3,L3,S1,S2**

Můžou nastat 3 případy:

Levá strana je těžší. Falešné proto mohou být buď T1, T2 nebo L3. Třetím vážením **T1 a T2** pak falešnou minci určíme.

Pravá strana je těžší. Falešné proto mohou být buď L1, L2 nebo T3. Třetím vážením **L1 a L2** pak falešnou minci určíme.

Váhy jsou v rovnováze. Falešná proto musí být mince T4 nebo L4. Stačí porovnat např. **T4 a S1** a máme odpověď.

Označíme si mince následovně:
**V1-V8 – (pravé) mince na vahách**,
**S1-S4 – mince na stole**.
Druhé vážení provedeme takto:
**V1,V2,V3 a S1,S2,S3**

Můžou nastat 2 případy:

Levá strana (nebo pravá) je těžší. Falešná mince – jedna z trojice S1,S2,S3 – je tedy lehčí. Stačí tedy třetím vážením dvě z nich porovnat.

Váhy jsou v rovnováze. Falešná mince je S4. Nevíme však, zda je lehčí či těžší než ostatní. Stačí ji tedy třetím vážením porovnat s jednou z pravých mincí.

**13) Máme dáno *n* mincí. Jedna z nich je falešná, což se projeví jinou hmotností mince. Nevíme však, jestli je těžší nebo lehčí než ostatní mince. K dispozici máme rovnoramenné váhy.**
**a) Mezi kolika (nejvíce) mincemi poznáme falešnou minci pomocí dvou vážení?**
**b) Mezi kolika (nejvíce) mincemi poznáme falešnou minci pomocí tří vážení?**

**14) Máme 13 na pohled nerozeznatelných mincí. Jedna z nich se liší v hmotnosti, ale nevíme, zda je lehčí či těžší. Jak na rovnoramenných vahách na tři vážení určíme, která to je?**

**15) Na vánočním stromku visely dvě modré, dvě červené a dvě bílé koule. Všechny vypadaly na vlas stejně, ale v každém barevném páru byla vždy jedna o něco těžší než druhá. Všechny tři lehčí vážili stejně, podobně všechny tři těžší koule vážili stejně. Je možné určit, které koule jsou ty těžší a které lehčí pouze na dvě vážení na rovnoramenných vahách?**

**16) Král má 10 pytlů zlaťáků. Jeden z jeho sluhů, kteří měli na starost přepravu peněz, ho chtěl okrást a v jednom z pytlů z každé mince, která normálně váží 10 gramů, jeden gram zlata upiloval. Král se to doslechl a chtěl podvodníka rychle odhalit. Může během jediného vážení určit, který pytel obsahuje lehčí mince a tedy, kterého sluhu má vyhodit?**

**17) Je možné sestavit sadu čtyř závaží takových, abychom pomocí nich mohli odvážit každý objekt vážící od 1 po 40 gramů (v intervalu 1 gramu). Závaží je možné přikládat na obě strany vah.**
**Jaké závaží bychom měli doplnit, aby se počet vážených objektů maximálně rozšířil? Kolik takových objektů potom bude možné zvážit?**

**18) Gumoví medvídci váží 10 gramů, jejich nepodařené imitace však pouze 9 gramů. Mezi 7 krabicemi jsou 4 s pravými medvídky. Na přesných vahách zjistěte pouze jediným vážením a použitím minimálního počtu medvídků, ve kterých krabicích jsou falešní medvídci.**

S rovnoramennými váhami si lze pohrát i prostřednictvím následujících aplikací:

http://www.softschools.com/games/logic_games/seesaw_logic/

http://www.mathplayground.com/wangdoodles.html

Řešení:

**1)** 9 4
1) 9 0
2) 5 4
3) 5 0
4) 1 4
5) 1 0
6) 0 1
7) 9 1
8) 6 4

**2)** 7 4 3
0) 7 0 0
1) 3 4 0
2) 3 1 3
3) 6 1 0
4) 6 0 1
5) 2 4 1
6) 2 2 3

**3)** 11 7
1) 0 7
2) 7 0
3) 7 7
4) 11 3
5) 0 3
6) 3 0
7) 3 7
8) 10 0
9) 10 7
10) 11 6

**4)** 9 5 4 2
0) 9 0 0 0
1) 5 0 4 0
2) 3 0 4 2
3) 3 2 4 0
4) 3 5 1 0
5) 3 3 1 2
6) 3 3 3 0

**5)** 24 13 11 5
0) 24 0 0 0
1) 13 0 11 0
2) 8 0 11 5
3) 8 5 11 0
4) 8 13 3 0
5) 8 8 3 5
6) 8 8 8 0

**6)**
a) 21 9 6
1) 15 9 12
2) 6 18 12
3) 12 12 12

b) 21 9 6
1) 12 18 6
2) 12 12 12

**7)** 12 8 5
0) 12 0 0
1) 4 8 0
2) 4 3 5
3) 9 3 0
4) 9 0 3
5) 1 8 3
6) 1 6 5
7) 6 6 0

**8)** 27 14 11 6
0) 27 0 0 0
1) 13 14 0 0
2) 13 3 11 0
3) 13 0 11 3
4) 0 13 11 3
5) 3 13 11 0
6) 3 7 11 6
7) 9 7 11 0
8) 9 14 4 0
9) 9 14 0 4
10) 9 3 11 4
11) 9 3 9 6
12) 9 9 9 0

**9)** a) 7 9
1) 7 0
2) 0 7
3) 7 7
4) 5 9
5) 5 0
6) 0 5
7) 7 5
8) 3 9
9) 3 0
10) 0 3
11) 7 3

b) 7 9
1) 0 9
2) 7 2
3) 0 2
4) 2 0
5) 2 9
6) 7 4
7) 5 0
8) 0 4
9) 4 0
10) 4 9
11) 7 6
12) 0 6
13) 6 0
14) 6 9
15) 7 8
16) 0 8
17) 7 1
18) 0 1
19) 1 0
20) 1 9

**10)**

| | | |
|---|---|---|
| 0: | 11 | 7 |
| 7: | 4 | 0->7 |
| 11: | 0 | 3->4 |
| 15: | | 0 |

| | | |
|---|---|---|
| 0: | 11 | 7 |
| 7: | 4 | 0->7 |
| 11: | 0->11 | 3 |
| 14: | 8->3 | 0 |
| 17: | 0 | 0->7 |
| 24: | | 0 |

**11)** Jde to stihnout za 15 minut. Po pěti minutách jednu topinku sundáme a druhou otočíme. Po deseti minutách je jedna hotová a dvě je třeba osmažit ještě z jedné strany.

**12)** Provaz sice hoří nerovnoměrně, ale celý vždy shoří na hodinu. Když ho tedy zapálíme z obou konců, shoří za půl hodiny. Stačí zapálit jeden provaz z obou konců a druhý jen z jednoho. Když první dohoří, zapálíme druhý i z opačného konce. Z něj už uhořela půlhodina takže zbytek shoří za čtvrt hodiny.

**13)** Máme-li falešnou minci pouze určit (bez ohledu na to, zda je lehčí nebo těžší než ostatní), můžeme tak s jistotou učinit pouze mezi 4 mincemi. Pro pět mincí už by bylo potřeba třetí vážení. Tato tři vážení pak postačí k porovnání nejvíce 13 mincí.

**14)** Dáme 8 mincí na váhy (čtyři a čtyři), 5 nechám na stole:

1. Váha je v rovnováze - hledaná mince je na stole.
2. Misky se vychýlí - odlišná mince je na vahách.

ad 1. Vezmu ze stolu tři mince a dám je na jednu misku. Dorovnám je třemi ověřenými mincemi (minulé vážení byly na misce).

 1.a Váhy jsou stále v rovnováze - je to jedna ze dvou, co jsem ještě nevážil.
 1.b Váhy se vychýlí - je to jedna ze tří, co jsem nyní poprvé dal na misku.

ad 2. Hledaná mince je mezi osmi, které jsem už vážil. Libovolné dvě mince z váhy sundám, libovolné tři přemístím mezi miskami. Aby vážení vůbec mělo smysl, dorovnám na misky ověřené mince (ze stolu) tak, aby byl na obou stranách váhy stejný počet mincí.

 2.a Váhy se dostanou do rovnováhy - je to jedna ze dvou mincí, co jsem sundal.
 2.b Váhy se překlopí na druhou stranu - je to jedna ze tří, co jsem přemístil.
 2.c Váhy zůstanou v původní pozici - je to jedna ze tří, co jsem nechal.

ad 1.a + 2.a
Vím že je to jedna ze dvou mincí. Jednu z nich porovnám s ověřenou. Váhy se buď vychýlí nebo ne.

ad 1.b + 2.b + 2.c
Vím, že je to jedna ze tří mincí. Ty jsou nyní na váze, která je nakloněná na jednu stranu. Jednu z těch mincí přemístím na druhou misku, jednu sundám, jednu nechám. Dorovnám ověřenými. Váha se buď překlopí, vyrovná, nebo zůstane...

**15)** Nejprve položíme na jednu misku vah například po jedné červené a jedné bílé kouli a na druhou misku jednu bílou a jednu modrou kouli. Jestliže jsou váhy v rovnováze, víme, že na každé straně je jedna těžší a jedna lehčí koule. Když tedy pak porovnáme tyto bílé koule, víme již vše potřebné.

Pokud však při prvním vážení jedna miska poklesne, musí na ní být bílá koule těžší. Zbývá tedy rozhodnout, jak je to s ostatními barvami.

**BČ BM**

Zbývající koule označíme **Č** a **M.**

Při druhém vážení tedy porovnáme například červenou (už váženou) kouli a modrou (ještě neváženou). Z výsledku vážení si už odvodíme vlastnosti všech koulí:

| Č | M |
|---|---|

**Č** těžší, **M** lehčí
**Č** lehčí, **M** těžší

| Č | M |
|---|---|

**Č** těžší, **M** těžší
**Č** lehčí, **M** lehčí

| Č | M |
|---|---|

**Č** lehčí, **M** těžší
**Č** těžší, **M** lehčí

V případě rovnováhy musí být obě koule těžší.
(V opačném případě by totiž při prvním vážení nemohla nastat rovnováha.)

**16)** Král vezme jednu minci z prvního pytle, dvě z druhého, tři z třetího, ... a deset z desátého. Provede vážení a zjistí, o kolik gramů je to lehčí, než by mělo být (10 + 20 + … + 100, tj. 550 g). Počet gramů, které „chybí“, pak udává pořadí pytle s falešnými mincemi.

**17)** Jsou to závaží o hmotnostech 1, 3, 9 a 27 g:

1
3-1 = 2
3
3+1 = 4
9-3-1 = 5
9-3 = 6
9+1-3 = 7
9-1 = 8
9
9+1 = 10
….
27+9+3+1 = 40

Doplníme-li sadu ještě o závaží o hmotnosti 81 g, můžeme takto odvážit všechny objekty až do hmotnosti 121 g.

**18)** Stačí použít 51 gumových medvídků. Cílem totiž je z každé krabice vybrat takový počet kusů, aby se následně dala jednoznačně identifikovat trojice krabic s falešnými medvídky.
Z krabic postupně vybereme 0 (z první krabice), 1, 2, 4, 7, 13 a 24 (z poslední krabice) medvídků. Těchto 7 hromádek, které obsahují 51 medvídků, by mělo vážit celkem 510 g. Pokud jsou však mezi nimi imitace, hmotnost, která do uvedeného počtu schází, udává číslo, které může být vytvořené pouze jedinou trojicí složenou z vybraných hromádek.

Kdyby tedy například vybraných 51 medvídků vážilo 500 gramů, znamená to, že na váze je 10 imitací (510 – 500). Jediné tři hromádky, které mají v součtu právě 10 medvídků, jsou druhá (1 medvídek), třetí (2 medvídci) a pátá (7 medvídků). Odpovídající krabice jsou tedy imitace.

## Použité zdroje:

Pouring & Dividing: *Creatieve Puzzels* [online]. [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://www.creatievepuzzels.com/spel/speel1/speel2/water2.htm

Hlavolamy a teorie grafů: *Škola matematického modelování* [online]. Petr Kovář ©2009 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://skomam.vsb.cz/archiv/2009/files/prednasky/P_Kovar.pdf

Die Hard III – scéna z filmu. In: *Videolab* [online]. [vid. 2014-12-01]. Dostupné z: https://videolab.avnet.kuleuven.be/video/?id=d3fc4a44204e75e36365218b8b9b119c

Water and Weighing Puzzles: *BrainDen.com* [online]. ©2012 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://brainden.com/weighing-puzzles.htm

Logické hádanky, zajímavé úlohy, hlavolamy [online]. Miloslav Pojman ©2014 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://hadanky.chytrak.cz/

## Použité obrázky:

Water [online]. ©2004-2015 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://puzzles.nigelcoldwell.co.uk/
Pitcher Clip Art [online]. ©2007 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://www.clker.com/clipart-13926.html
Jug Clip Art [online]. [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://printablecolouringpages.co.uk/?s=roman+jug+of+water
Old 3D Hourglass [online]. ©2011 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://iconbug.com/detail/icon/8309/old-3d-hourglass/
Scales [online]. [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://www.free-witchcraft-spells.com/justice-spells.html
Brass scales with cupped trays [online]. ©2011 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brass_scales_with_cupped_trays.png
Scale Clip Art [online]. ©2011 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z:
http://www.clker.com/clipart-scale-6.html

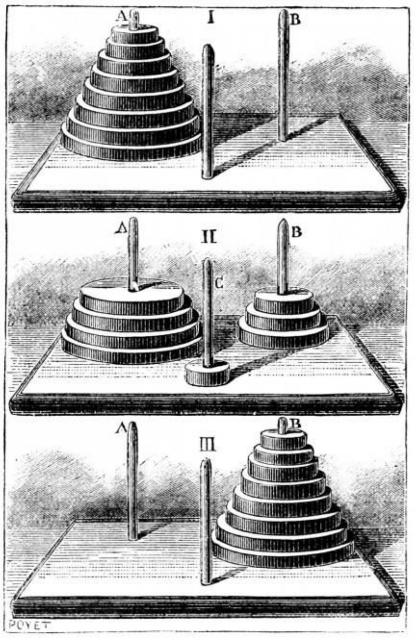
# 4. HANOJSKÁ VĚŽ

*Pod kopulí svatyně z Benáresu stojící přesně uprostřed světa se nachází bronzová deska a na ní stojí tři diamantové trny,*

*každý o délce lokte a šířce včely. Na jeden z těchto trnů umístil Brahma, když tvořil svět, 64 kotoučů z ryzího zlata. Největší se nacházel dole a na něm postupně menší a menší.*

*Každý den a noc mniši z nedalekého kláštera překládají kotouče z jednoho diamantového trnu na druhý podle neměnných pravidel: každý mnich může přesunout vždy jen jeden kotouč a může ho umístit jen tak, aby se vždy nacházel na větším kotouči.*

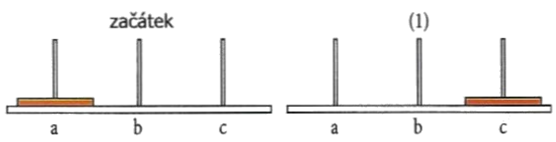
*Až jednou bude takto přeneseno všech 64 kotoučů z trnu, na který je Brahma umístil, na jiný trn, pak se všechno obrátí v prach a celý svět bude zničen...*

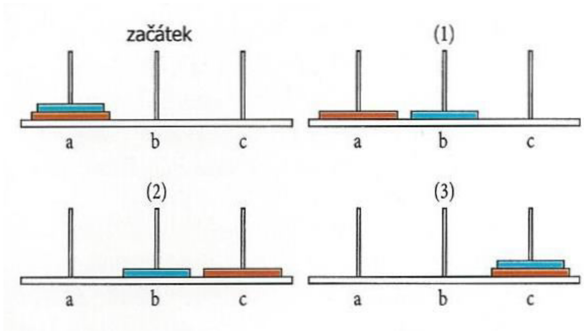



Tolik praví legenda...
Klasická varianta této úlohy je známá od 19. století. Hra spočívá v přesouvání disků z jednoho kolíku na druhý, přičemž v každém tahu lze přesunout pouze jeden disk a nelze odložit větší disk na menší. S malým počtem disků jde o úkol relativně jednoduchý. Pokud však počet disků roste, zvyšuje se také počet potřebných tahů a řešení je čím dál obtížnější. O tom se lze přesvědčit např. zde:

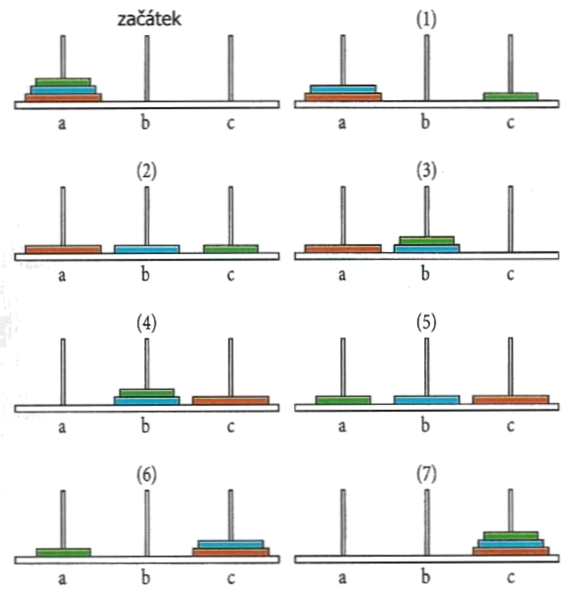
http://www.softschools.com/games/logic_games/tower_of_hanoi/

Podívejme se blíže, kolik tahů je třeba k přesunu disků dle zadaných pravidel. V případě jednoho a dvou disků je situace jasná. K přesunu jednoho disku stačí jeden tah, k přesunu dvou disků potřebujeme tři tahy:




Teprve v případě třech kotoučů začíná být situace zajímavá:




Všimněme si, že v případě třech kotoučů lze celý proces rozdělit na tři části. Nejdříve přesuneme věž složenou ze dvou kotoučů, poté přesuneme největší kotouč a nakonec opět přesuneme věž se dvěma kotouči, vše za použití nejmenšího počtu tahů. První a poslední fáze se vůbec neúčastní největší kotouč. Vše probíhá, jako by kolík, na kterém se nachází, byl prázdný. A protože pro přesunutí věže ze dvou kotoučů je zapotřebí tří tahů, v případě tří kotoučů je to tedy

$$3 + 1 + 3 = 7 \text{ tahů.}$$

Odtud je vidět, že minimální počet tahů potřebných pro přesun *n* disků se odvíjí od předchozího případu, kdy jsme měli o disk méně, tzn. *n-1* disků. Platí tedy jednoduchý vzorec

$$T_n = 2 \,.\, T_{(n-1)} + 1$$

kde *T* je počet tahů a *n* je počet disků. Můžeme tak doplnit tabulku pro první hodnoty :

| **Počet disků** | **Minimální počet tahů** | |
|---|---|---|
| 1 | 1 = | 1 |
| 2 | 1 + 1 + 1 = | 3 |
| 3 | 3 + 1 + 3 = | |
| 4 | = | |
| 5 | = | |
| ….. | ….. | ….. |

Dostáváme se tak k tomu, čím jsou Hanojské věže zajímavé. Především svým „zanořeným“ charakterem. Podobně jako známá matrjoška, kterou otevřeme, abychom našli další matrjošku, zjistíme při řešení Hanojských věží pro *n* disků, že potřebujeme vyřešit Hanojské věže pro *n-1* disků. Abychom mohli přesunout spodní disk, musíme nejdřív přesunout disky nad ním, což vlastně odpovídá trochu jednodušší verzi zadání.

Existuje však obecný vzorec, který nám řekne, kolik tahů bude potřeba pro přesun *n* disků, aniž bychom znali počty předchozích tahů? Např. kolik tahů je minimálně potřeba pro 10 disků? Pokud se podíváme znovu na výsledné hodnoty v předchozí tabulce, můžeme si všimnout, že každá z nich je vlastně mocninou dvojky zmenšenou o jedničku, viz následující tabulka. Chybějící hodnoty rovněž snadno doplníme:

| **Počet disků** | **Minimální počet tahů** | |
|---|---|---|
| 1 | 1 = | $2^1 - 1$ |
| 2 | 3 = | $2^2 - 1$ |
| 3 | = | $2^3 - 1$ |
| 4 | = | |
| 5 | = | |
| ….. | ….. | ….. |

Odtud tedy dostáváme

$\boxed{T_n =}$

Můžeme si tedy snadno spočítat hodnoty minimálního počtu tahů pro libovolný počet disků.

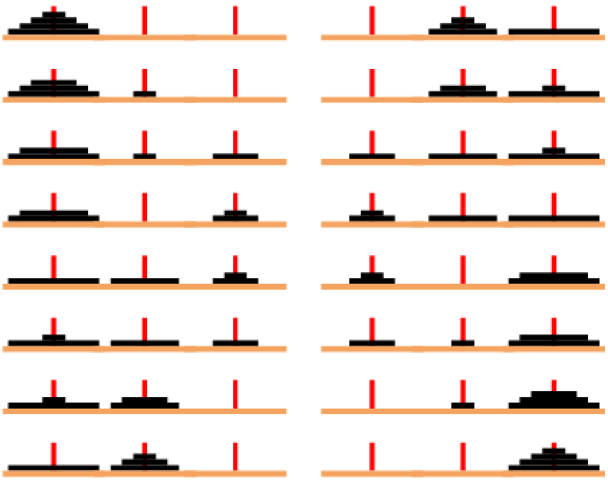
$T_{10} =$ $T_{20} =$ $T_{30} =$

A jak je to tedy s tím koncem světa? Nemusíme se obávat. Pro věž s 64 disky je podle našeho vzorce minimální počet tahů roven číslu

$$\mathbf{2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615}$$

I kdyby tedy mniši stihli provést jeden tah každou sekundu (a postupovali nejkratším možným způsobem), trvalo by jim to opravdu dlouho. Přibližně ……………………………… .

Strategie řešení



Už víme, na kolik tahů se dá Hanojská věž přeskládat. To však ještě neznamená, že se nám to povede. Přeskládat větší počet disků už je poměrně náročné. Existuje však jedno pravidlo, podle kterého lze hlavolam vyřešit na nejmenší počet tahů:
Střídavě se přesunuje nejmenší kotouč a jiný kotouč než nejmenší. Přesunuje-li se nejmenší kotouč, pak se vždy přesune o jednu věž dál ve stále stejném směru, a to doprava při celkovém sudém počtu kotoučů a doleva při lichém (předpokládáme, že věže stojí v řadě vedle sebe, počáteční je nejvíce vlevo a cílová nejvíce vpravo). Je-li již nejmenší kotouč na poslední věži v tomto směru, přesune se na věž na protějším konci. Má-li být přesunut jiný kotouč než nejmenší, je to možné provést vždy jen jediným způsobem. Tento „střídavý“ pohyb je vidět na obrázku, který představuje řešení Hanojské věže pro čtyři disky.

Neočekávané spojení s binární soustavou

Řešení Hanojské věže je úzce spojeno s binární číselnou soustavou. Když očíslujeme disky od nejmenšího k největšímu čísly 1, 2, 3, …, můžeme každý prováděný tah znázorňovat pomocí série čísel 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1 (případ třech disků). Zapíšeme-li binární čísla ve vzestupném pořadí, vidíme, že se vždy mezi binárním číslem a každým dalším vyskytuje pod sebou pouze jedna jediná dvojice číslic 0 a 1. Zapisujeme-li tedy (odzadu) pouze polohu, kterou zaujme tato dvojice, obdržíme postupně tahy, které musíme provést při skládání Hanojské věže.

V následující tabulce je popsána strategie pro řešení Hanojské věže se třemi a čtyřmi disky:

| **Zápis v desítkové soustavě** | **Zápis v binární soustavě** | **Poloha, kterou zaujme dvojice 0 a 1** | | **Zápis v desítkové soustavě** | **Zápis v binární soustavě** | **Poloha, kterou zaujme dvojice 0 a 1** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 000 | | | 0 | 0000 | |
| 1 | 001 | 1 | | 1 | 0001 | 1 |
| 2 | 010 | 2 | | 2 | 0010 | 2 |
| 3 | 011 | 1 | | 3 | 0011 | 1 |
| 4 | 100 | 3 | | 4 | 0100 | 3 |
| 5 | 101 | 1 | | 5 | 0101 | 1 |
| 6 | 110 | 2 | | 6 | 0110 | 2 |
| 7 | 111 | 1 | | 7 | 0111 | 1 |
| | | | | 8 | 1000 | 4 |
| | | | | 9 | 1001 | 1 |
| | | | | 10 | 1010 | 2 |
| | | | | 11 | 1011 | 1 |
| | | | | 12 | 1100 | 3 |
| | | | | 13 | 1101 | 1 |
| | | | | 14 | 1110 | 2 |
| | | | | 15 | 1111 | 1 |

Jak bude vypadat tabulka jednotlivých tahů pro pět disků?

| **Desítková s.** | **Binární s.** | **Poloha 0-1** | **16** | 10000 | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 00001 | 1 | **17** | 10001 | |
| **2** | 00010 | 2 | **18** | 10010 | |
| **3** | 00011 | 1 | **19** | 10011 | |
| **4** | 00100 | 3 | **20** | 10100 | |
| **5** | 00101 | 1 | **21** | | |
| **6** | 00110 | 2 | **22** | | |
| **7** | 00111 | 1 | **23** | | |
| **8** | 01000 | 4 | **24** | | |
| **9** | 01001 | 1 | **25** | | |
| **10** | 01010 | 2 | **26** | | |
| **11** | 01011 | 1 | **27** | | |
| **12** | 01100 | 3 | **28** | | |
| **13** | 01101 | 1 | **29** | | |
| **14** | 01110 | 2 | **30** | | |
| **15** | 01111 | 1 | **31** | | |

Řešení:

| **Počet disků** | **Minimální počet tahů** | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 = | 1 | $2^1 - 1$ |
| 2 | 1 + 1 + 1 = | 3 | $2^2 - 1$ |
| 3 | 3 + 1 + 3 = | 7 | $2^3 - 1$ |
| 4 | 7 + 1 + 7 = | 15 | $2^4 - 1$ |
| 5 | 15 + 1 + 15 = | 31 | $2^5 - 1$ |

$T_n = 2^n - 1$

$T_{10}$ = 1 023
$T_{20}$ = 1 048 575
$T_{30}$ = 1 073 741 823

Skládání by trvalo přibližně 600 miliard let!

| **Desítková s.** | **Binární s.** | **Poloha 0-1** | **16** | 10000 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 00001 | 1 | **17** | 10001 | 1 |
| **2** | 00010 | 2 | **18** | 10010 | 2 |
| **3** | 00011 | 1 | **19** | 10011 | 1 |
| **4** | 00100 | 3 | **20** | 10100 | 3 |
| **5** | 00101 | 1 | **21** | 10101 | 1 |
| **6** | 00110 | 2 | **22** | 10110 | 2 |
| **7** | 00111 | 1 | **23** | 10111 | 1 |
| **8** | 01000 | 4 | **24** | 11000 | 4 |
| **9** | 01001 | 1 | **25** | 11001 | 1 |
| **10** | 01010 | 2 | **26** | 11010 | 2 |
| **11** | 01011 | 1 | **27** | 11011 | 1 |
| **12** | 01100 | 3 | **28** | 11100 | 3 |
| **13** | 01101 | 1 | **29** | 11101 | 1 |
| **14** | 01110 | 2 | **30** | 11110 | 2 |
| **15** | 01111 | 1 | **31** | 11111 | 1 |

Použité zdroje:

*Mozkolam: logické skládačky a hlavolamy, které rozhýbají mozek a představivost*. Warszawa: De Agostini Polska, c2008, 16 s. ISBN 978-83-248-0816-8.

PELÁNEK, Radek: *Hanojské věže.* Vesmír 89, 544, 2010/9. Dostupné elektronicky: http://radekpelanek.cz/dokumenty/hanojske-veze.pdf

Hanojské věže [online], poslední aktualizace 9. 11. 2014 [cit. 2014-12-01], Wikipedie. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Hanojsk%C3%A9_v%C4%9B%C5%BEe

Logické hádanky, zajímavé úlohy, hlavolamy [online]. Miloslav Pojman ©2014 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://hadanky.chytrak.cz/

Použité obrázky:

Parchment Background or Border [online]. ©2010 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: https://openclipart.org/detail/57367/Parchment%20Background%20or%20Border
PSM V26 D464 The tower of hanoi [online]. ©2010 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:PSM_V26_D464_The_tower_of_hanoi.jpg?uselang=cs
Matrjoška [online]. ©2014 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://www.e-hracky.cz/zpravy/matrjoska.htm
Towers of Hanoi Solution [online]. ©1999-2015 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://mathworld.wolfram.com/TowerofHanoi.html

# 5. ALGORITMICKÉ MYŠLENÍ

**Anotace:**
v rámci hodin informatiky se žáci seznámí s problematikou algoritmizace a prostřednictvím vhodných příkladů se seznámí s tím, co je to vlastně programování. V rámci této práce navíc nebude potřeba počítač. Potřebné pomůcky jsou pouze tužka a čtverečkovaný papír.

**Cíle lekce**
1. pochopení obtíží a systému při převodu reálných problému do počítačového programu
2. trénink komunikace prostřednictvím symbolů a kódů

**Potřebné pomůcky**
1 tabulky pro žáky, tužka, kartičky s připravenými programy

**Nové pojmy**
Algoritmus: postupné kroky, které vedou k vyřešení zadaného problému
Program: algoritmus, který je napsán ve speciálním jazyce a spuštěn v počítači
Debugging: hledání a opravování chyb v programu

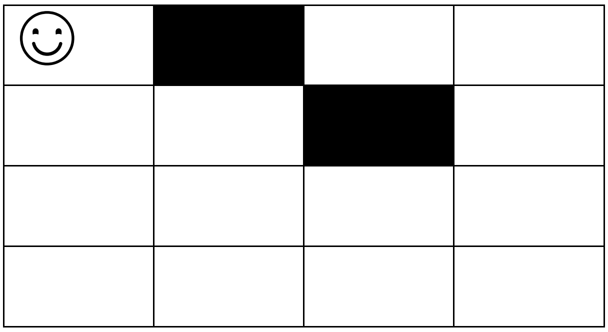
## 5.1 ÚVOD DO „“PAPÍROVÉHO“ PROGRAMOVÁNÍ

V této aktivitě budou žáci vytvářet vlastní programy a poté je budou interpretovat před spolužáky. Pro tuto aktivitu budeme potřebovat tabulky 4x4. Začátek bude vždy v pravém horním rohu. Při tvorbě programu budeme využívat tyto jednoduché instrukce

*Posuň se o jeden čtvereček doprava*
*Posuň se o jeden čtvereček doleva*
*Posuň se o jeden čtvereček dolů*
*Posuň se o jeden čtvereček nahoru*
*Vybarvi políčko*

Žáci se rozdělí do dvojic, jeden z dvojice vytvoří instrukce, druhý je pak bude interpretovat do připravené tabulky

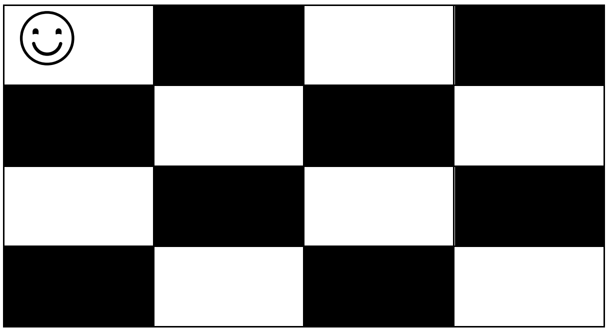
Začátek zde
↓



Posuň se doprava
Vybarvi políčko
Posuň se dolů
Posuň se doprava
Vybarvi políčko

**Takto interpretovaný program je jednoduchý, problém nastane v následujícím programu:**

Začátek zde
↓



*Posuň se dolů, Vybarvi políčko, Posuň se dolů, Posuň se dolů, Vybarvi políčko, Posuň se doprava, Posuň se nahoru, Vybarvi políčko, Posuň se nahoru, Posuň se nahoru, Vybarvi políčko, Posuň se doprava, Posuň se dolů, Vybarvi políčko, Posuň se dolů. Posuň se dolů, Vybarvi políčko, Posuň se doprava, Posuň se nahoru, Vybarvi políčko, Posuň se nahoru, Posuň se nahoru, Vybarvi políčko*

Takto napsaný program je příliš zdlouhavý, proto je potřeba vymyslet způsob, jak si daný postup zjednodušit (optimalizovat). Žáci by si měli tuto skutečnost sami uvědomit.

**Možnost zjednodušení – použití zápisu pomocí šipek**

→ *Posuň se doprava*
← *posuň se doleva*
↓ *posuň se dolů*
↑ *posuň se nahoru*

■ *Vybarvi políčko*

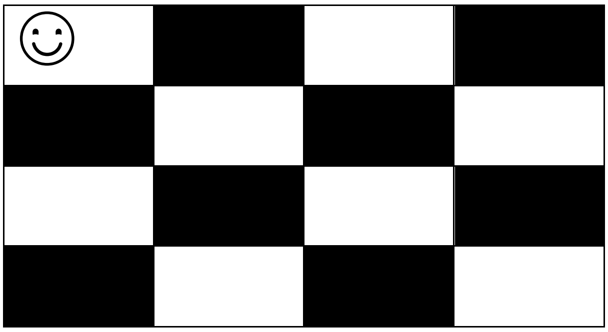
**Náš algoritmus, který jsme zapsali takto:**
*Posuň se doprava, posuň se doprava, vybarvi políčko*

**Nyní koresponduje s tímto zápisem**:

→ → ■

**Použití tohoto zápisu nám náš program zjednoduší**

Začátek zde
↓



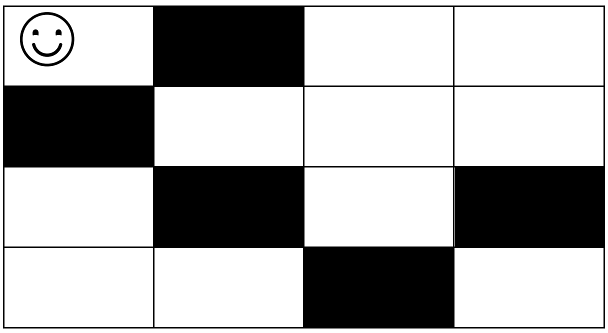
→ ■ → → ■ ↓
← ■ ← ← ■ ↓
→ ■ → → ■ ↓
← ■ ← ← ■ ↓

Pozn. Všimněte si, že náš program je nyní napsán odlišně, přesto však vykoná stejnou činnost. Žáci by si měli být schopni uvědomit, že existuje několik algoritmů, které řeší stejný problém (stejně jako v reálném životě). Našim cílem tedy je, aby si žáci uvědomili, že v rámci naši práce je nejvhodnější volit nejkratší cesty, aby i náš program byl co nejkratší.

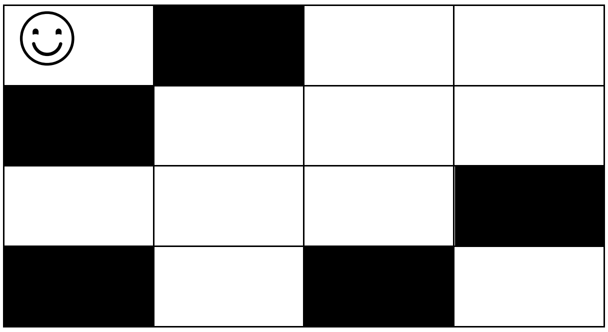
### 5.1.1 Cvičení

V rámci cvičení by žáci měli pracovat ve skupinách, přičemž by si vzájemně zadávali tvorbu programů (vytvořená tabulka) a stejně tak i vzájemně vytvářeli programy (zadání algoritmu).

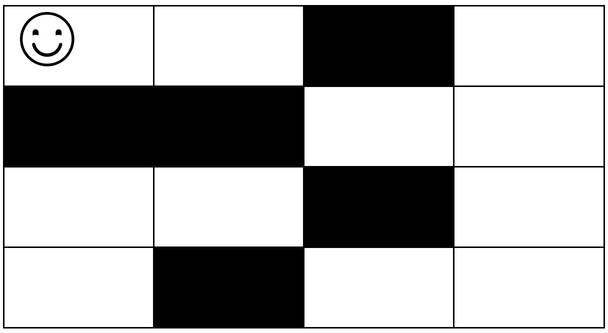
**a) Zapište programy, které vytvoří následující tabulky**



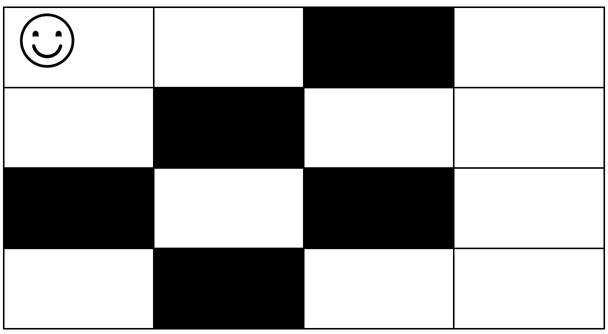
Tabulka 1



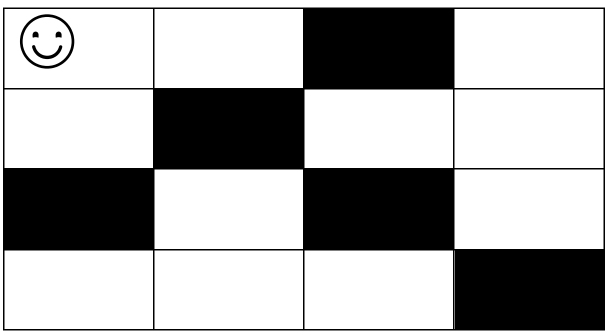
Tabulka 2



Tabulka 3



Tabulka 4

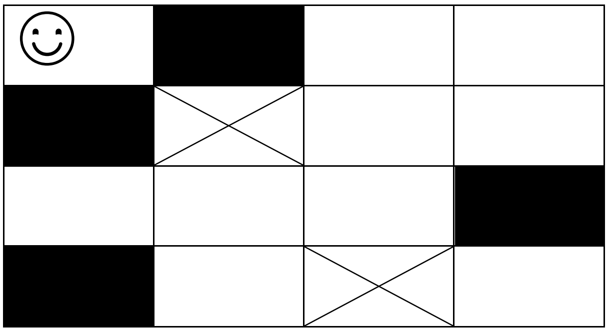


Tabulka 5

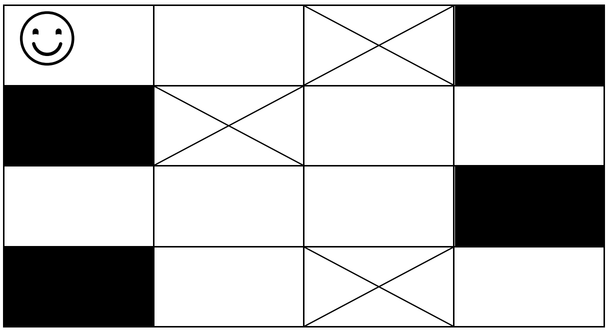
**b) vytvořte tabulku, která odpovídá následující algoritmy**

a) → ■ ↓ → ■ → ■ ↓ ↓ ■
b) ↓ ↓ → ■ ↓ ■ → ■ → ■ ↑ ■
c) → ■ → ■ ↓ ■ → ↓ ■ ↓ ■
d) ↓ → ■ → ↑ ■ → ↓ ■ ↓ ■ ← ← ■
e) ↓ → ■ → ■ ↓ ← ■ ← ■ ↓ → ■ → ■

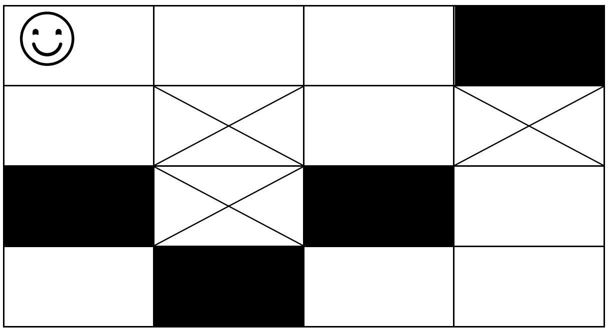
Práci žákům můžeme ztížit vyřazením některých políček. Úkolem je pak vytvořit co nejkratší program, který vytvoří zadanou tabulku.



1. cvičení



2. cvičení



3. cvičení

### 5.1.2 Další možnosti

- zvýšit počet sloupců a řádků
- přidat další možnosti – pouze jeden průchod políčkem atd.
- určení jiného počátku programu
- zjednodušení zápisu

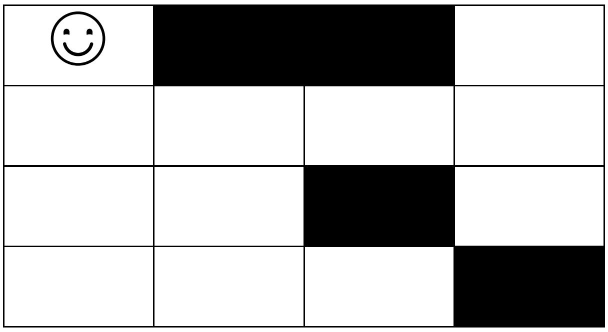
Zápis: → ■ → ■ ↓ ■ ↓ ■ ↓ ■

Zapíšeme: 2 (→ ■) 3 (↓ ■)

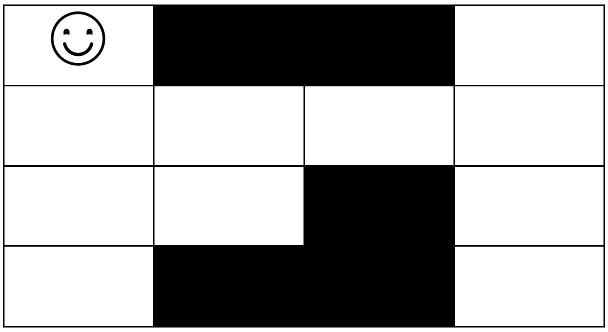
Příklad:

Zápis 2(→ ■) 2 (↓) → ■ ↓ 2(← ■) odpovídá které možnosti?

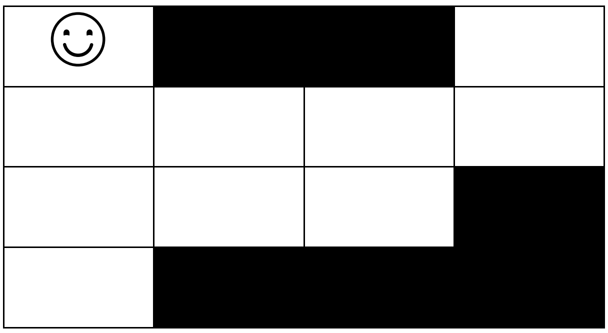
**a)**



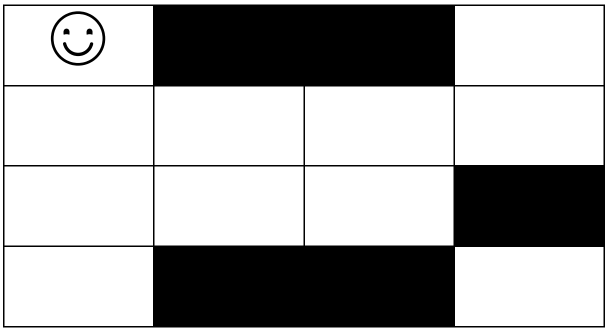
**b)**



**c)**

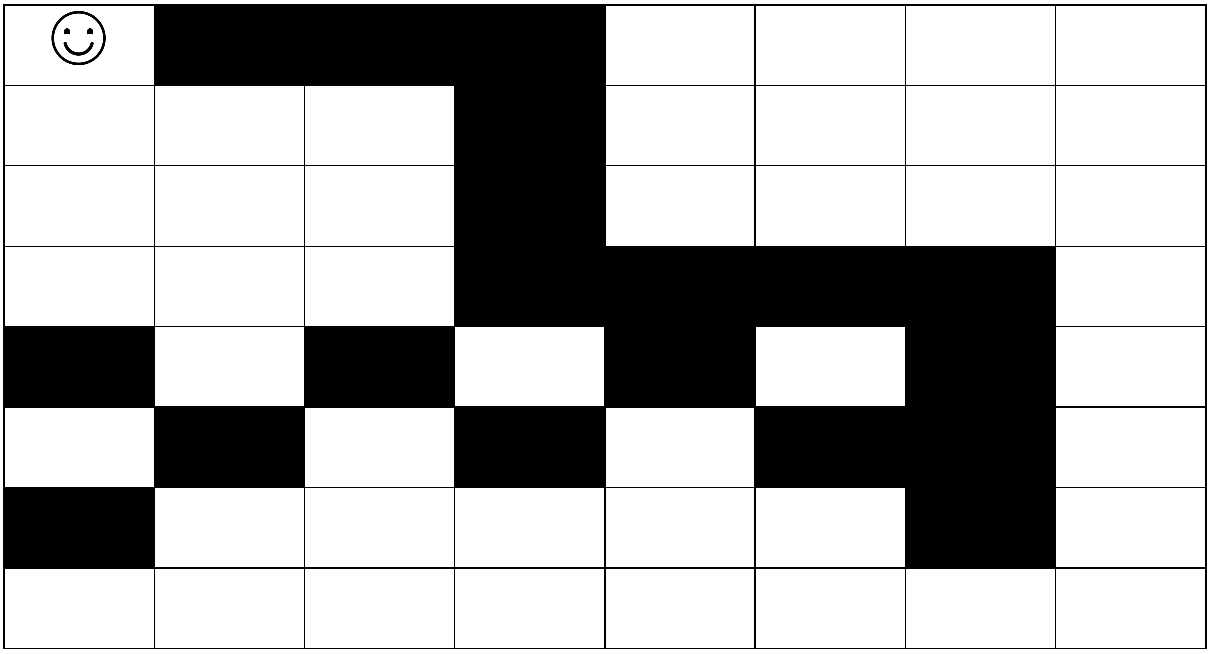


**d)**



**Pozn.**
Zjednodušený zápis je vhodný spíše pro tabulky s více řádky a více sloupci. V tom případě žáci musí dekódovat o mnoho složitější kód. I pro samotné žáky je tato možnost zajímavější, jelikož si vzájemně mohou vytvářet daleko zajímavější úlohy. Viz následující příklad.
V rámci programování také můžeme zápis závorek považovat za smyčku (loop), jelikož náš algoritmus je v tomto případě několikrát zopakován.

**Př. Následující program odpovídá, kterému z algoritmů?**



a) 2 [3( → ■) 2 (↓ ■)] 2[ 4( ↑ ↓■) 2 (↓)]

b) 2 [3( → ■) 3 (↓ ■)] 3[ 2( ↑ ← ■) 2 (↓)] ■

c) 2 [3(→ ■) 3 (↓ ■)] 3[ 2(← ↑ ■) 2 (↓)] ■

d) (↓ ■ ) 2 [ 2(→ ↓ ■) 2 (↓ → ■)] 3[ 2(← ↑ ■) 2 (↓)]

Průchod naším programem můžeme dále ztížit určením jiného pohybu. Například jeden pohyb jsou dva posuny vpřed, posun 2x dopředu jednou dozadu apod.

**Př. Pohyb figurky šachového koně**

**přípustné pohyb :** →→↓, →→↑, ↑↑→, ↑↑←, ↓↓→, ↓↓←

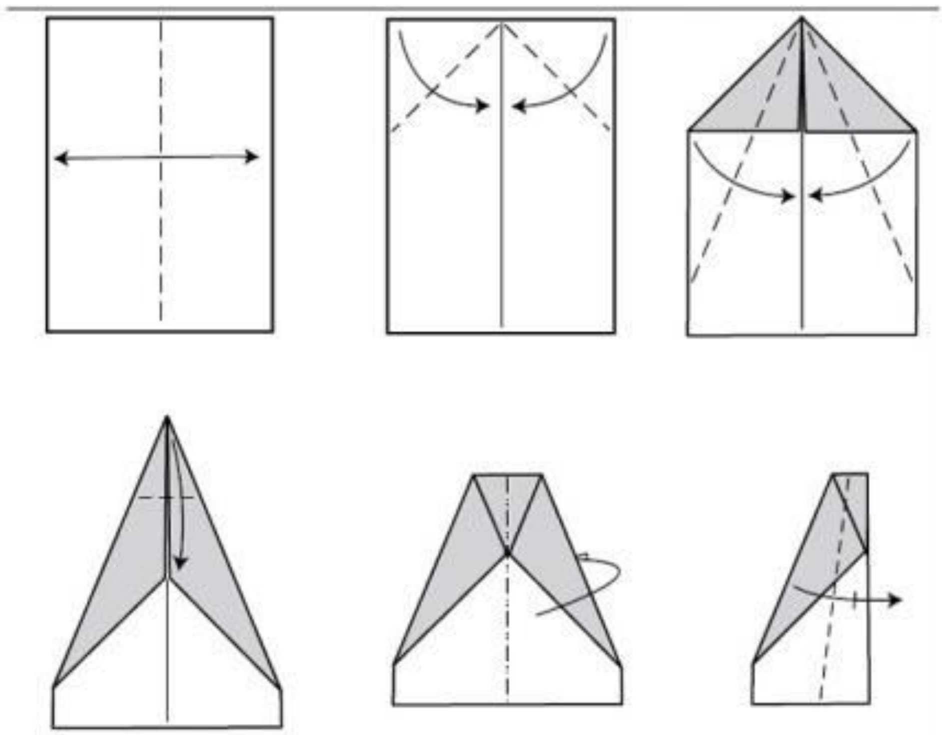
**Př. Kolik nejméně pohybů vykoná Smajlík, aby se dostal do cíle?**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **cíl** | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | ☺ | | | | |

**A) 5** **b) 6** **c)7** **d) 8**

## 5.2 CVIČENÍ: ALGORITMUS V REÁLNÉM ŽIVOTĚ

S algoritmy se setkáváme každý den, jelikož každý náš den se řídíme určitými naučenými postupy, případně plníme úkoly a příkazy. Např. víme jak si namazat svačinu,jak dojít do školy a ze školy atd. Algoritmy nám tak pomáhají při řešení našich problémů.
Zadání: vytvořte si papírovou vlaštovku podle zadaného algoritmu, daný algoritmus přepište do slovního vyjádření.



obr.1

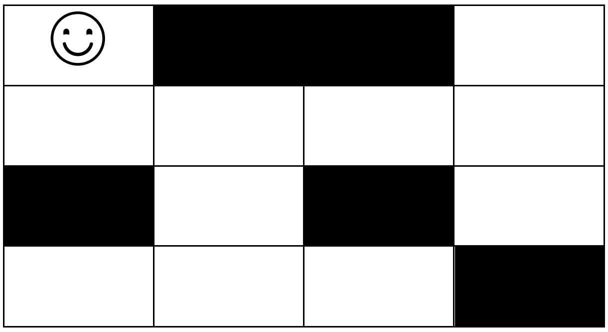
## 5.3 DEBUGGING

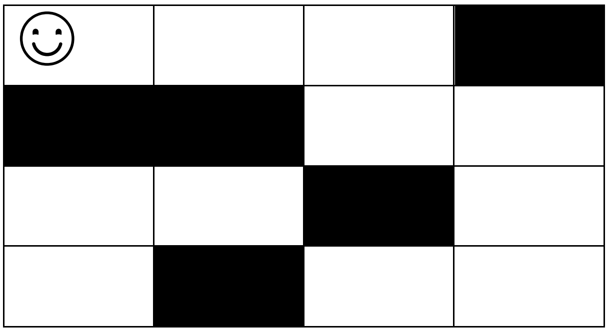
Hledání a opravování chyb v programu

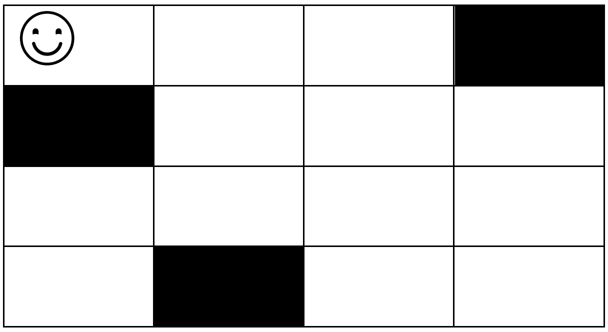
**Cvičení – programovací štafeta**

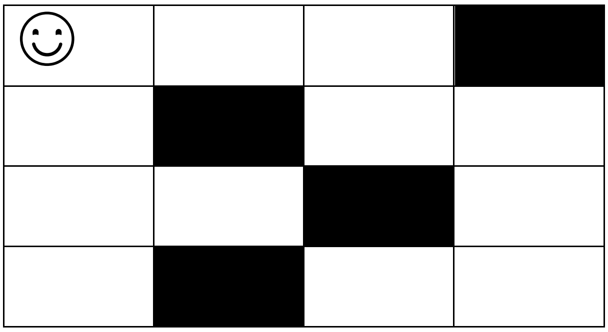
**Popis aktivity**
1. Žáky rozdělíme do skupinek po 4 až 5 žácích
2. Každá skupina bude mít k dispozici zadání programu, které bude umístěno mimo dosah skupiny
3. Po začátku hry jeden ze skupiny přichází k zadání a zapíše první krok algoritmu a vrací se zpět
4. následuje další člen týmu, který napíše další krok, takto se členové týmu střídají do té doby, než je napsán celý program.
5. Důležité je, že jeden žák může napsat pouze jeden krok. Za krok se počítá i oprava.
6. Vítězí nejrychlejší skupina

Programy k použití (lze vytvořit i vlastní)









## 5.4 PODMÍNKY

Algoritmus je vykonám pouze za splnění, určité podmínky

**Cvičení:** hra s kartami
**Pomůcky:** balíček karet
**Vytvoříme několik jednoduchých programů, které budou závislé na vylosovaných kartách**
1. hráče rozdělíme do týmů
2. hráčům rozdělíme karty (minimum karet = počet hráčů)
3. týmy zapisují program a tím získají body

**Příklad algoritmu:**

Když (karta je červena) pak tým a získá 1 bod
Jinak tým b získá 1 bod

**Příklad algoritmu v pseudokódu**
***když (karta == „červená“) tak (body.tým.a = body.tým.a + 1)***
***jinak (body.tým.b = = body.tým.b + 1)***

**v dalším kroku vkládáme nové podmínky vnořením**

Když (karta je červena) pak
tým a získá 1 bod

Jinak

Když (karta je větší než 9) pak
tým b získá 1 bod

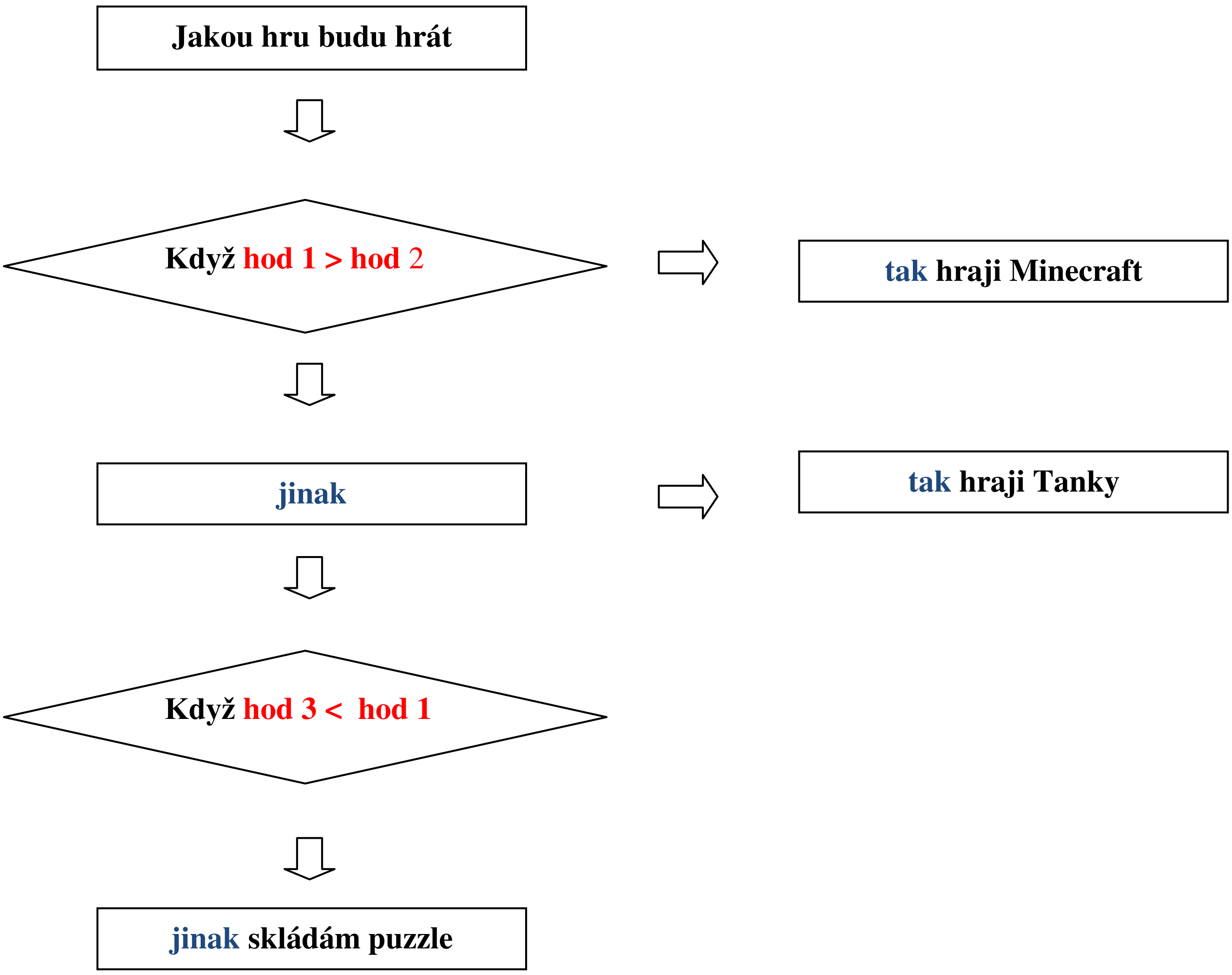
Jinak tým a získá tolik bodů, jež odpovídají hodnotě karty

**Příklad algoritmu v pseudokódu**
***když (karta.barva == „červená“)***
***tak (body.tým.a = body.tým.a + 1)***
***jinak { když (karta.hodnota > 9)***
***tak (body.tým.b = body.tým.b + 1)***
***jinak (body.tým.a = body.tým.a + karta.hodnota)}***

Pozn. Nechte žáky vytvářet vlastní programy a zapisujte vzniklé hry v pseudokédech.

### 5.4.1 Další možné úlohy na podmínky

Kryšpín se nemůže rozhodnout, kterou hru si zahrát. Nejraději by hrál všechny ze svých tří nejoblíbenějších, ale musí se rozhodnout. Proto si řekl, že třikrát hodí hrací kostkou a pak se bude rozhodovat podle těchto pravidel:




Dneska házel a vyšlo mu, že má skládat puzzle.

**Jaká čísla mu padala na hrací kostce?**

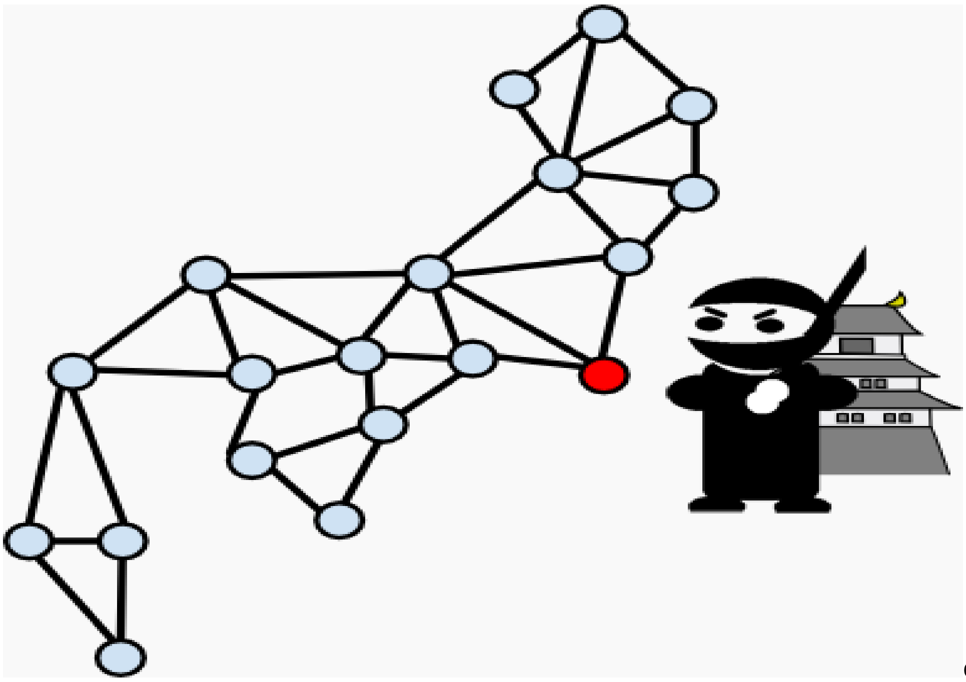
a) první hod 3, druhý hod 4, třetí hod 3.
b) první hod 2, druhý hod 4, třetí hod 1.
c) první hod 6, druhý hod 5, třetí hod 5.
d) první hod 5, druhý hod 1, třetí hod 6.

## 5.5 DALŠÍ LOGICKÉ-PROGRAMOVACÍ ÚLOHY[1]

### a) Teorie grafu

***úloha 1***

Kdysi dávno v Japonsku někteří nindžové sloužili vládě šóguna. Ti se svolávali kouřovými signály. Červený bod na obrázku ukazuje sídlo šóguna země. Každý bleděmodrý bod je místo, kde se může zapálit oheň a vyslat kouřový signál. Jsou-li dva body spojeny čárou, jsou jejich kouřové signály navzájem vidět. U každého bodu jsou nindžové, kteří zde drží nepřetržitou strážní službu. Když uvidí kouřový signál, zapálí svůj oheň během 1 minuty.



obr.2

Šógun zapálil svůj oheň. **Za jak dlouho bude oheň hořet na všech místech?**

a) za 7 minut  b) za 6 minut  c) za 5 minut  d) za 4 minut

[1] Následující úlohy jsou modifikací úloh ze zadání soutěže Bobříka informatiky z let 2010 až 2012

***úloha 2***

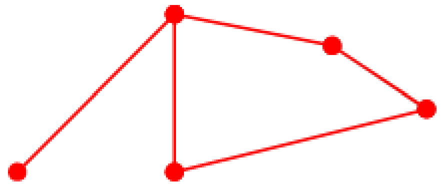
Víme, že:

- Michalovi kamarádi jsou Jan, Petr a Tomáš
- Janovi kamarádi jsou Michal a Hana
- Hanin kamarád je Jan
- Petrovi kamarádi jsou Michal a Tomáš
- Tomášovi kamarádi jsou Michal a Petr

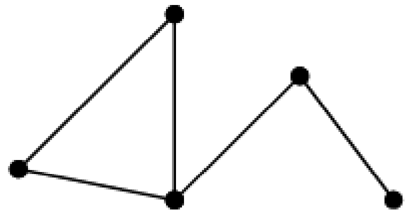
Znázorníme lidi jako body a čáru mezi dvěma lidmi nakreslíme, když víme, že jsou kamarádi.

**Který z obrázků můžeme tímto postupem dostat?**

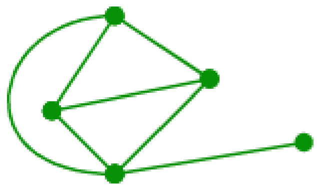
**a)**



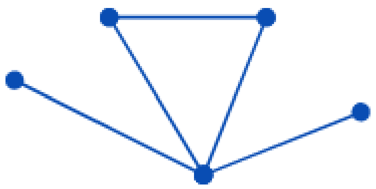
b)



c)

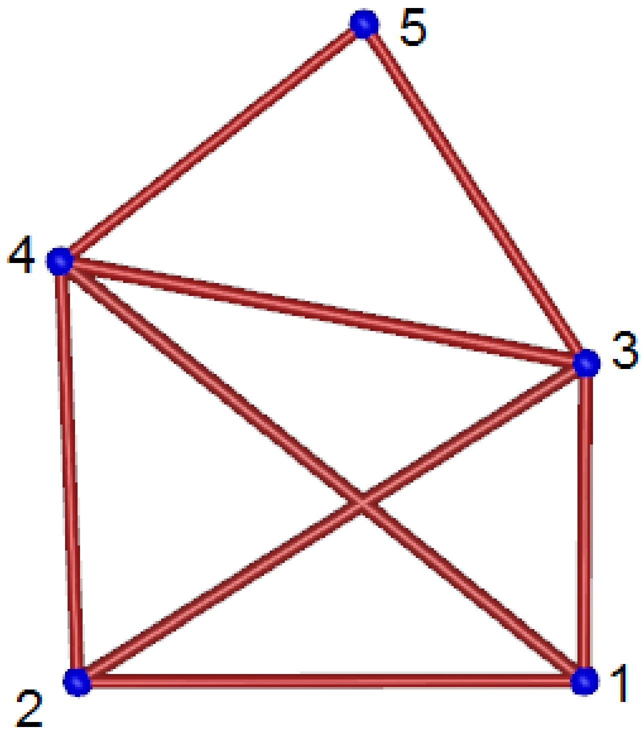


d)



***úloha 3***

Železniční síť spojuje 5 měst (viz plánek). Jednotlivé tratě se **křižují pouze ve městech** - mezi městy se míjejí pomocí nadjezdů a tunelů. **Je možné projet všemi tratěmi tak, aby se žádnou z nich nemuselo jet dvakrát?** Ve kterém městě je třeba začít a kde skončit takovou cestu?




a) Je možné začít i skončit kdekoliv
b) Je třeba začít i skončit v 5
c) Je třeba začít v 2 a skončit v 1
d) Nelze to provést

## b) Práce s tabulkou

***úloha 1***

Na mistrovství světa v atletice se určuje pořadí států podle počtu získaných medailí. O pořadí rozhoduje nejprve počet zlatých, pak počet stříbrných a nakonec počet bronzových medailí. Platí to i v následující tabulce. Jsou v ní zobrazeny 4 nejúspěšnější státy v průběhu mistrovství

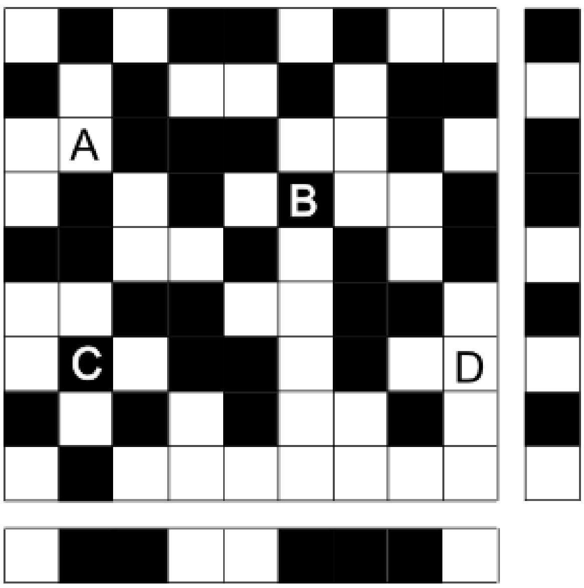
| Pořadí | Stát | Zlato | Stříbro | Bronz |
|---|---|---|---|---|
| 1. | USA | 6 | 4 | 1 |
| 2. | Německo | 6 | 3 | 6 |
| 3. | Rusko | 5 | 3 | 4 |
| 4. | Čína | 5 | 2 | 5 |

**Ve kterém z následujících případů se změní pořadí států v této tabulce?**
a) atlet Německa získá bronzovou medaili
b) čínský atlet získá stříbrnou medaili
c) atlet USA získá stříbrnou medaili
d) ruský atlet získá zlatou medaili

**úloha 2**

Marek nakreslil obrázek pomocí bílých a černých čtverců, přičemž prozradil kamarádovi, jak takový obrázek nakreslit. Aby měl jistotu, že je obrázek správně, přidal k obrázku kontrolní řádek a sloupec. Když je počet černých čtverců v sloupci sudý, přidá do kontrolního řádku černé pole; když je lichý, přidá bílé pole. Totéž pravidlo použije i pro kontrolní sloupec.

**Tomášův kamarád nakreslil kontrolní řádek i sloupec správně, ale udělal chybu v obrázku. Zjisti, na kterém místě se chyba nachází.**




a) A

b) B

c) C

d) D

## c) Algoritmy

***úloha 1***

Mikuláš je fotbalista, který má předepsaný tréninkový plán, jenž přesně dodržuje. Na dnešní trénink má připraveno:

činnost intervalový běh

- vykonej aktivitu rovinka
- vykonej aktivitu rovinka
- vykonej aktivitu rovinka

činnost rovinka

- vykonej aktivitu interval
- vykonej aktivitu interval
- vykonej aktivitu interval
- vykonej aktivitu interval

Aktivita interval

- sprintuj 80 metrů
- zastav se
- ujdi 20 metrů

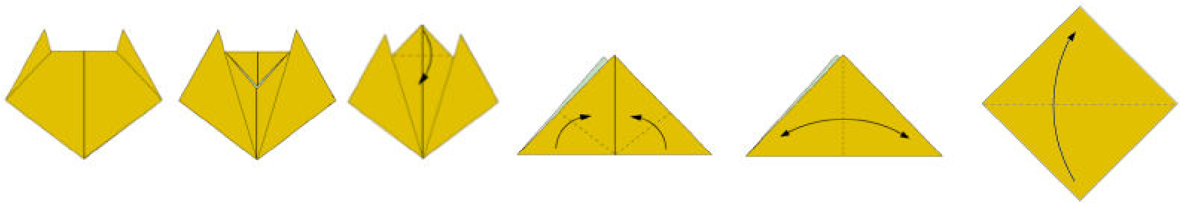
Kolik metrů uběhne Mikuláš za trénink?

a)800 b) 1000 c)1200 d) 1400

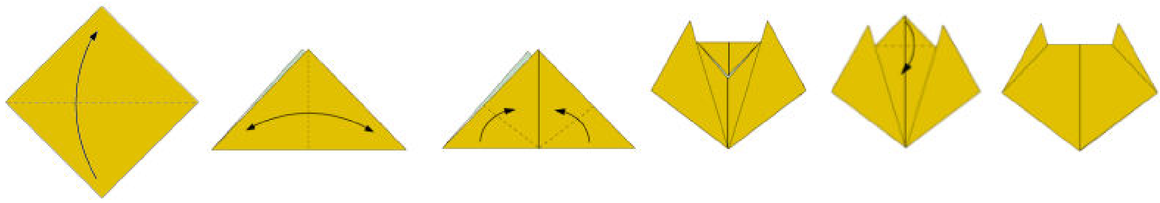
***úloha 2***

Která z následujících návodů popisuje správné pořadí kroků při skládání origami kočičí hlavy z papíru?

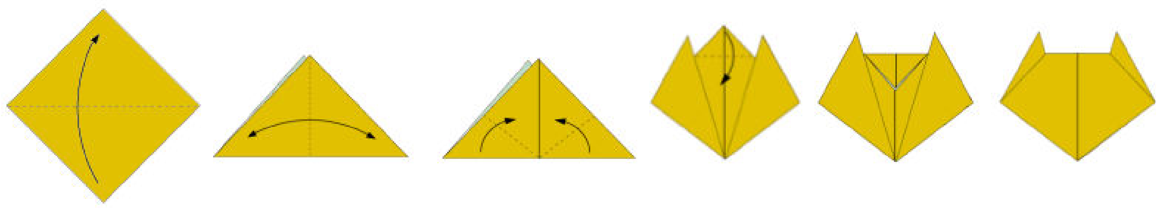
a)



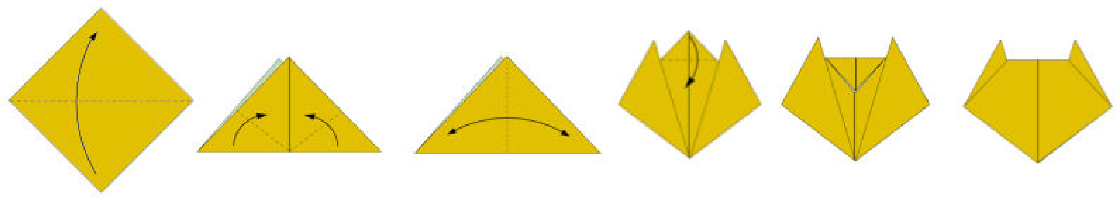
b)



c)



d)



## 5.6 ZDROJE A INSPIRACE:

*Programovací laboratoř*
Hours of code - algorithm. *The Hour of Code.* [online]. 13.3.2015 [cit. 2015-03-13]. Dostupné z: http://studio.code.org/s/course3

Hours of code - debugging. *The Hour of Code.* [online]. 13.3.2015 [cit. 2015-03-13]. Dostupné z: http://studio.code.org/s/course2

*Bobřík informatiky*
iBobr archiv. *Bobřík informatiky.* [online]. 13.3.2015 [cit. 2015-03-13]. Dostupné z: http://www.ibobr.cz/test/index.php?demo&archiv

*Teorie grafů*
Teorie grafů úvod. *Teorie grafů.* [online]. 13.3.2015 [cit. 2015-03-13]. Dostupné z: http://teorie-grafu.cz/uvod/

Použité obrázky:

Papírová vlaštovka – návod (obr.1) [online]. ©2012 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://www.keliwood.cz/aktuality/papirova-vlastovka-navod
Archív testů portálu ibobr.cz [online]. ©2008-2014 [cit. 2014-12-01]. Dostupné z: http://www.ibobr.cz/test/index.php?demo&archiv