



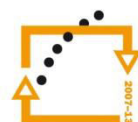
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

MODUL TVOŘIVOSTNÍ



Název projektu: **Skupinová výuka mimořádně nadaných dětí na Úvoze II**

Registrační číslo projektu: **CZ.1.07/1.2.17/02.0051**

Autoři: **Mgr. Radek DOLEŽAL, Mgr. Miloš PŘINOSIL**

Úvod

Tento text vznikl během realizace projektu Skupinová výuka mimořádně nadaných dětí na Úvoze II. Jedná se o materiály v podobě pracovních listů, testů, her či projektů, které mají pedagogům a dětem pomoci při rozvíjení kreativity, myšlení, luštění hlavolamů a hádanek, rozšiřování obzorů o nové pojmy a poznatky z různých oblastí lidských činností.

Jednotlivé výukové materiály budou obsahovat i řešení či ukázkou možnosti vypracování daných úkolů. Některé mohou sloužit hlavně pedagogům jako inspirace pro práci s nadanými žáky, většinou se však bude jednat o takové materiály, které lze žákům nakopírovat k samostatnému vypracovávání. Na některých místech je zejména z důvodů přehlednosti a úspory místa uvedeno řešení úkolů nebo příkladů přímo v textu, který se žákům tiskne. V takovém případě ponecháváme volnou ruku k jakékoliv kreativní úpravě materiálu pedagogem pro své vlastní potřeby.

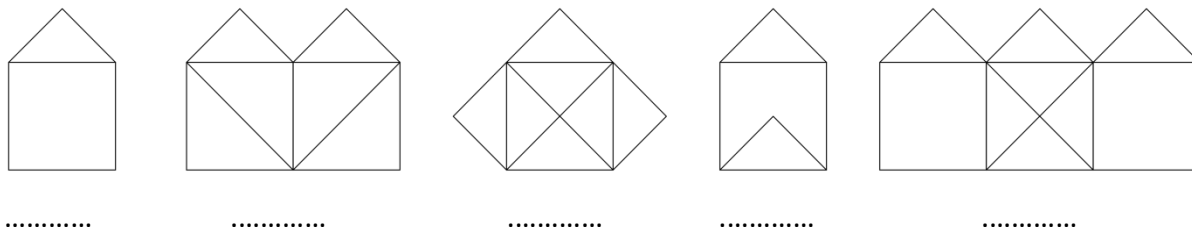
Věříme, že tento soubor materiálů bude užitečnou a vítanou pomůckou pedagogům, kteří hledají náročnější či rozšiřující úkoly pro žáky, kteří rádi přemýšlí, kriticky uvažují a jsou dychtiví poznat další dosud neznámé oblasti lidského poznání.

Obsah

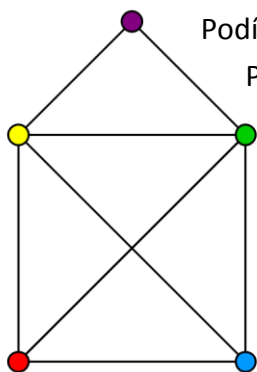
Obsah	3
Domečkologie	4
Dělení obrazců	8
Aporie	17
Magické čtverce	25
Latinské čtverce	30
Světoví a čeští vědci	32
Šifrování a kódování.....	35

Domečkologie

Nakreslit domeček jedním tahem zkoušel snad každý. A snad každému se to (dřív nebo později) povedlo. Zkusme pro začátek jedním tahem nakreslit další podobné domečky...



Metodou „pokus – omyl“ brzy zjistíme, že zatímco u většiny domečků jsme úspěšní, jeden z nich jedním tahem nenakreslíme. Otázka tedy zní: **Dá se nějak určit, kdy to jde a kdy to naopak nemá smysl vůbec zkoušet?**



Podívejme se nejprve na klasický domeček. Ten jedním tahem nakreslit umíme. Proč to však někdy vyjde „napoprvé“ a někdy se „zasekneme“ a domeček nedokončíme? Záleží totiž na tom, kde s jeho kreslením začneme. Zkusme tedy zvolit za počátek postupně každý bod a ověřme, zda se nám domeček nakreslit podaří či nikoliv:

ČERVENÝ	ŽLUTÝ	FIALOVÝ	ZELENÝ	MODRÝ
.....				

V čem se tyto body od sebe liší? Samozřejmě počtem čar, které z nich vychází. Stačí si uvědomit následující:

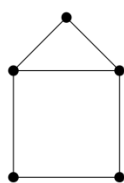
Prochází-li bodem sudý počet čar, znamená to, že jednou čarou do bodu vejde a druhou zase vyjde. Takový bod je tedy vždy průchozí. V našem obrázku jde o bod žlutý, fialový a zelený. Prochází-li však bodem lichý počet čar, znamená to, že se z něj nakonec nedá vyjet. To platí pro bod červený a modrý. Zatímco „sudý bod“ nám kreslení nijak nenaruší, v „lichém bodě“ se vždy musí začít anebo skončit.

Co z toho vyplývá?

Obrázky, u nichž z každého bodu vychází sudý počet čar, nakreslíme jedním tahem vždy. Začít můžeme v libovolném bodě a zároveň v něm i skončíme.

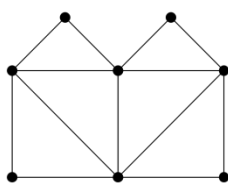
Obrázky, u nichž z některých bodů vychází lichý počet čar, lze jedním tahem nakreslit, právě když jsou takové body dva. Přitom začít musíme v jednom z těchto bodů a skončit v tom druhém.

Vraťme se nyní k původním domečkům a ověřme, zda u nich naše teorie platí. Spočítejme, z kolika bodů vychází sudý/lichý počet čar:



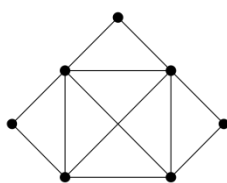
S

L



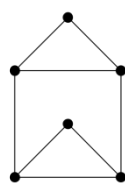
S

L



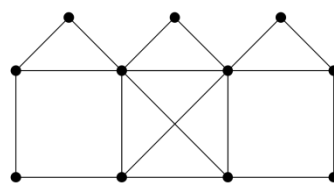
S

L



S

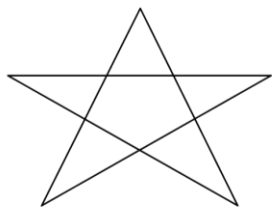
L



S

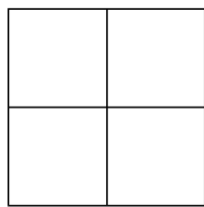
L

Jak tedy při kreslení obrázků jedním tahem postupovat? Nejdříve zkontrolujeme všechny vrcholy (= body, jimiž jednotlivé čáry procházejí) a rozhodneme, jestli to vůbec jde a o jakou variantu obrázku se jedná. Potom můžeme začít s kreslením – buď v libovolném vrcholu „sudého stupně“ nebo v jednom ze dvou vrcholů „lichého stupně“.



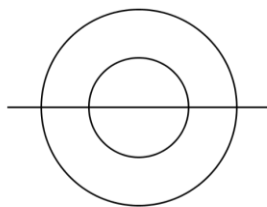
S

L



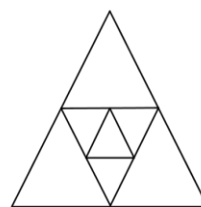
S

L



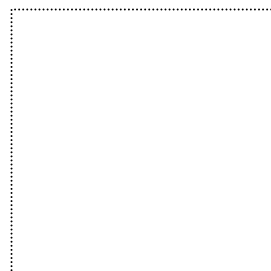
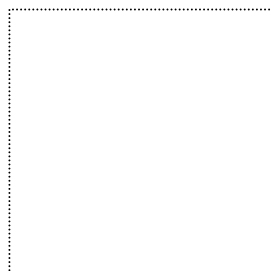
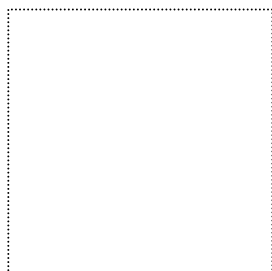
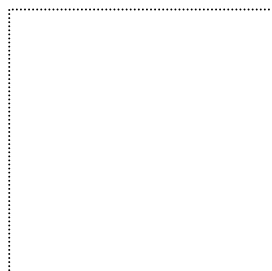
S

L

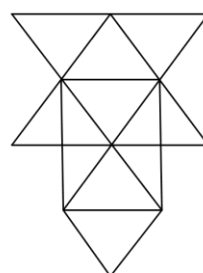
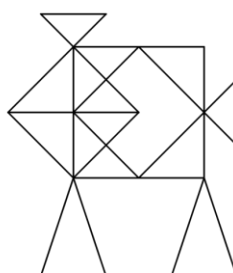
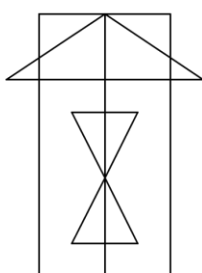
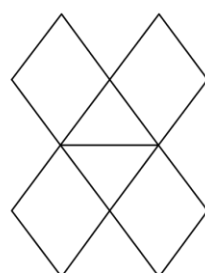
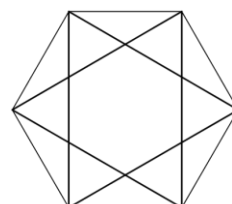
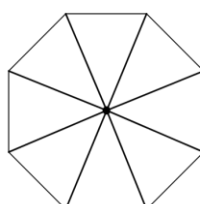
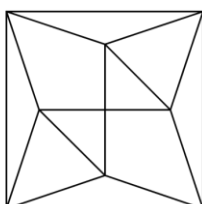
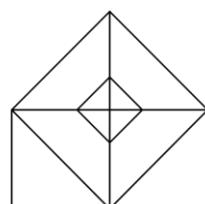
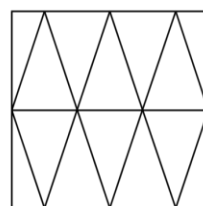
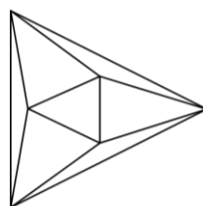
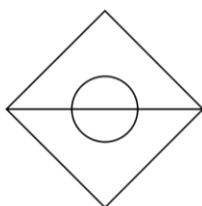
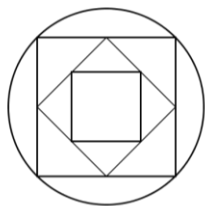


S

L



Následující obrazce – pokud to jde – nakresli jedním tahem:



S tímto tématem souvisí velmi zajímavý problém, který řešil jeden z největších matematiků všech dob – Leonhard Euler. Ve městě Královec (dnešní Kaliningrad) vytváří řeka dva ostrovy, které s oběma břehy vzájemně propojuje sedm mostů. Místní obyvatelé zájímalo, jestli je možné projít všemi mosty – každým právě jednou – a přitom se vrátit na původní místo.



Euler tehdy úlohu vyřešil, resp. matematicky dokázal, že taková procházka není možná. Když mapu s mosty interpretujeme pomocí jednoduchého obrázku, který se skládá z bodů (pevniny) a čar (mosty), dokážeme to jistě taky..... 😊

Použité zdroje:

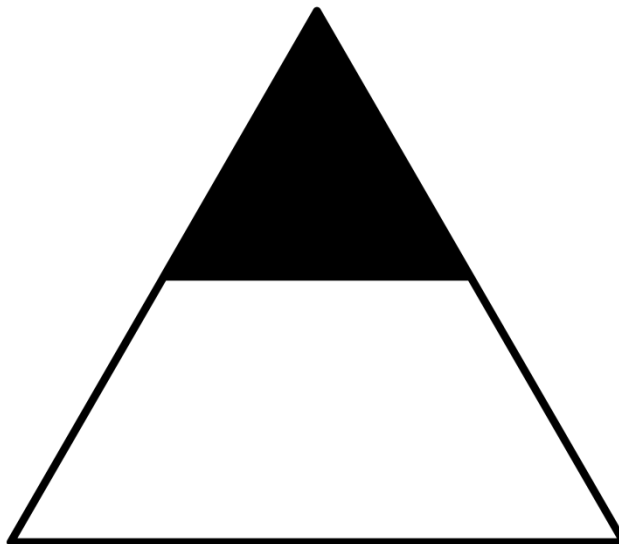
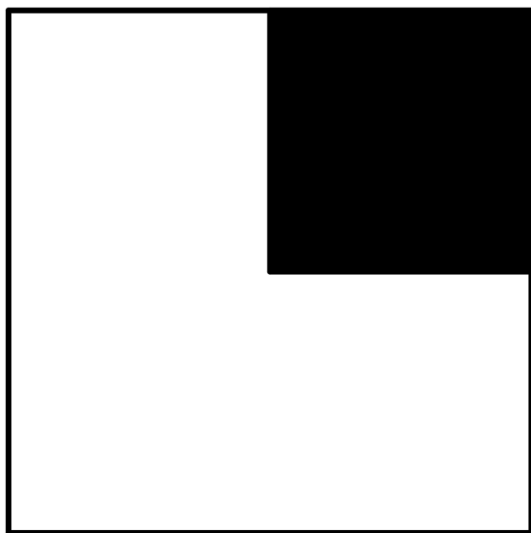
CHAJDA, Radek. *Hravá matematika*. Vyd. 1. Brno: Computer Press, 2009, 64 s. ISBN 978-80-251-2532-8.

Použité obrázky:

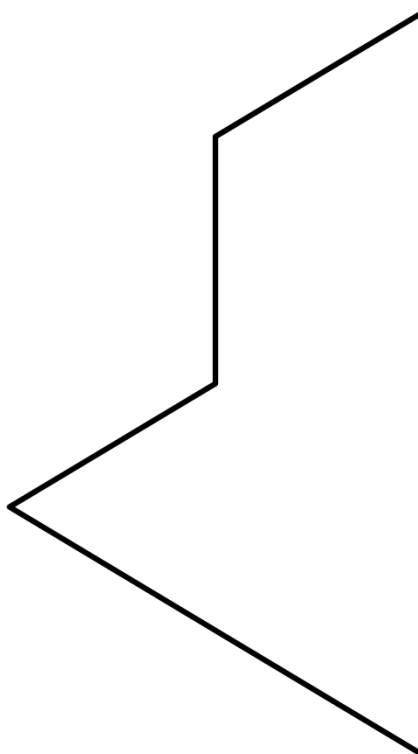
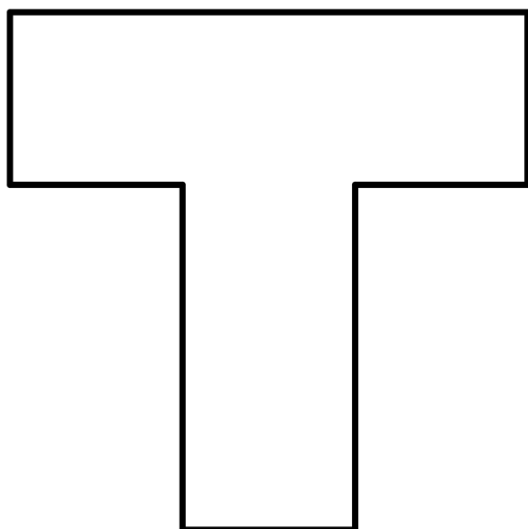
Euler w przedszkolu [online]. ©2012 [cit. 2014-5-10]. Dostupné z:
<https://osswiata.pl/stojda/2012/07/16/euler-w-przedszkolu/>

Dělení obrazců

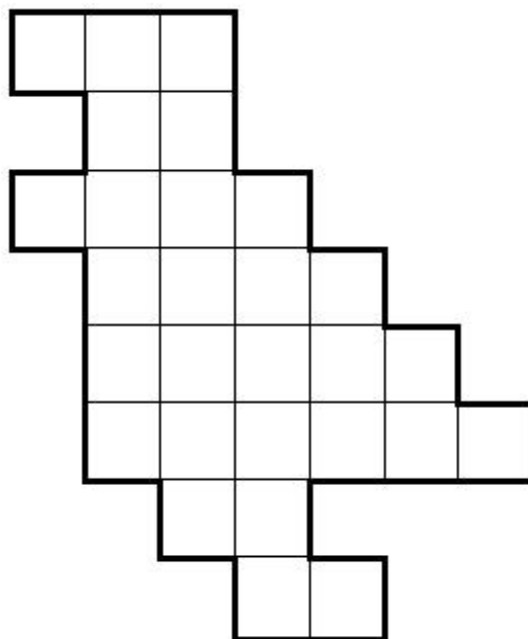
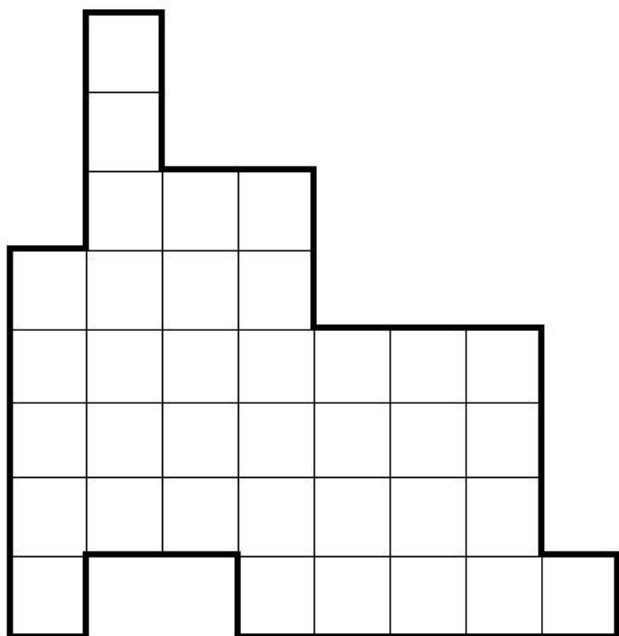
Po oddělení jedné čtvrtiny čtverce/trojúhelníku rozděl vzniklé obrazce na čtyři shodné části.



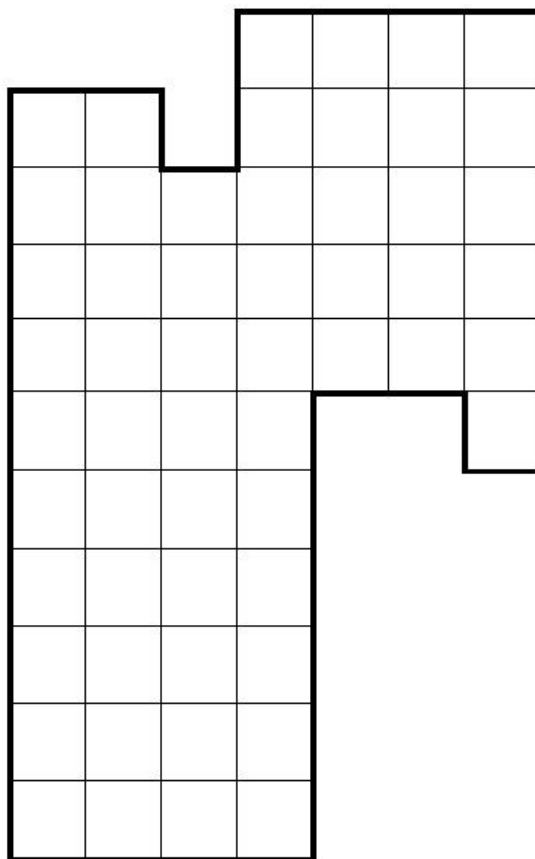
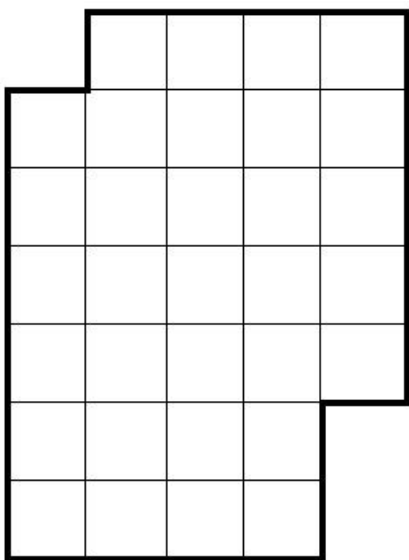
Rozděl každý obrazec na čtyři shodné části.



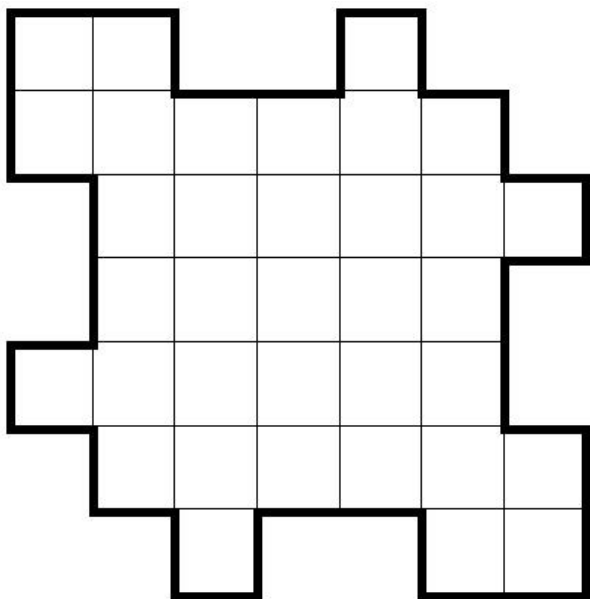
Rozděl obrazce na čtyři shodné části. Ve kterém případě je možné jejich přeskládáním složit čtverec?



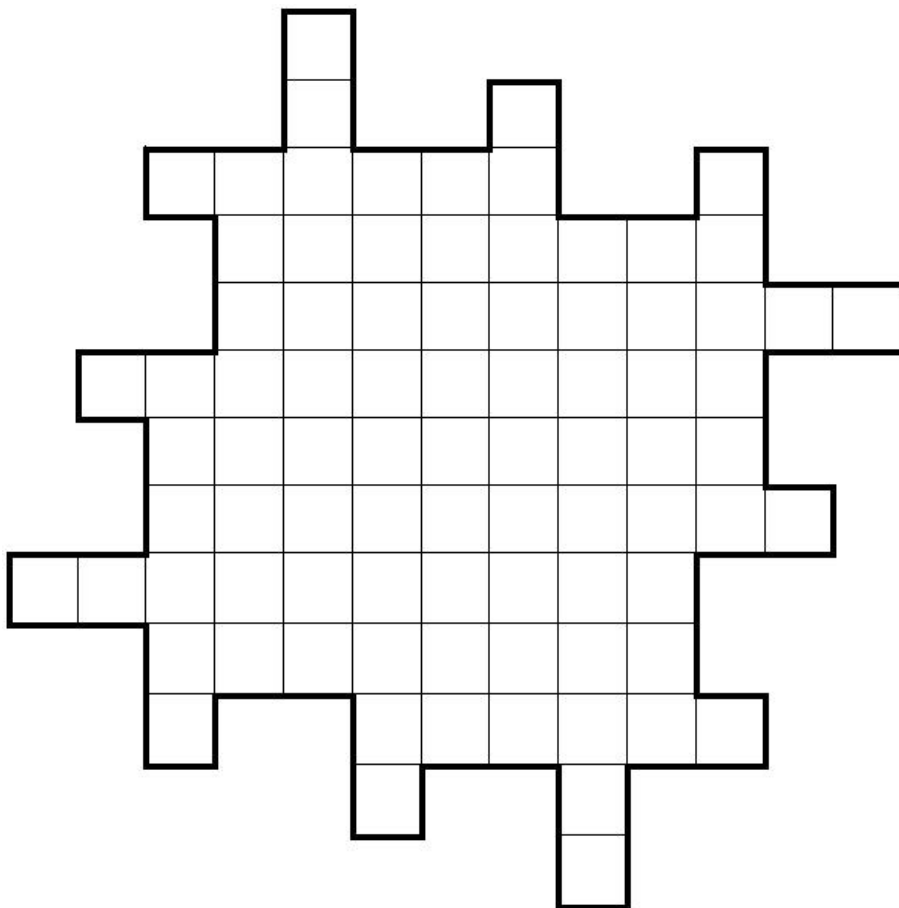
Rozděl obrazce na dvě shodné části.



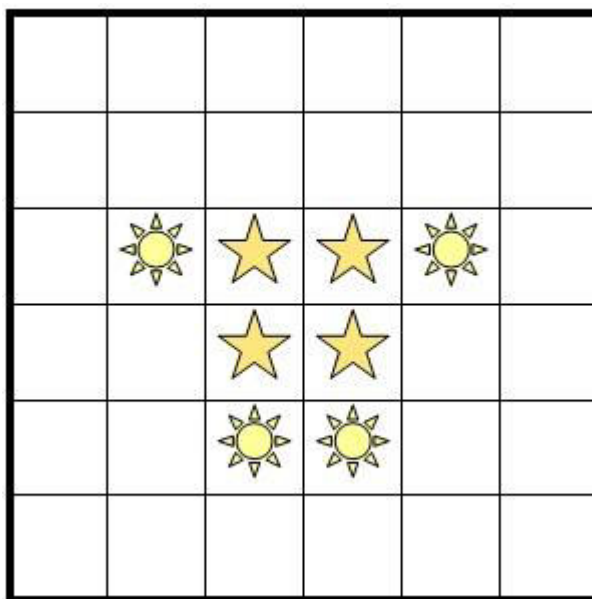
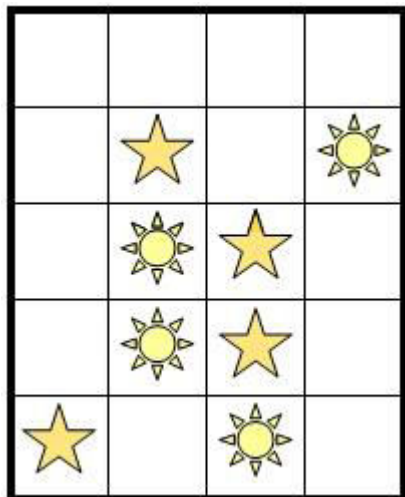
Začerni tři čtverečky a rozděl obrazec na čtyři shodné části. Najdi všechna řešení.



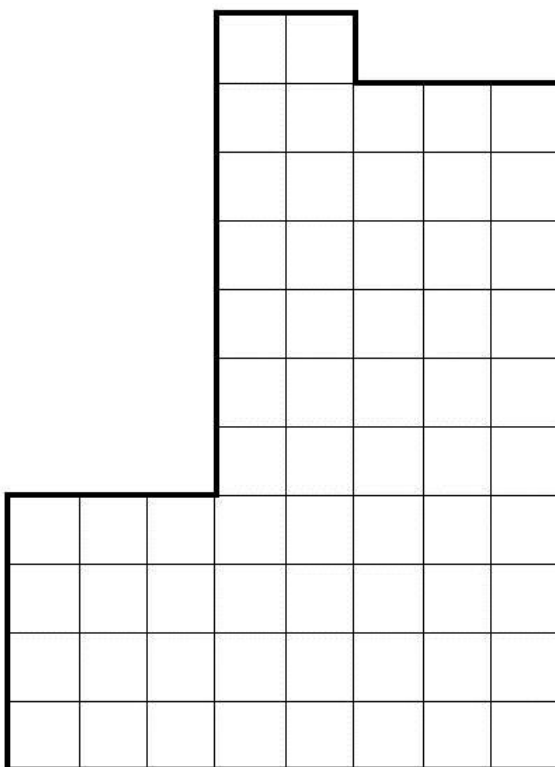
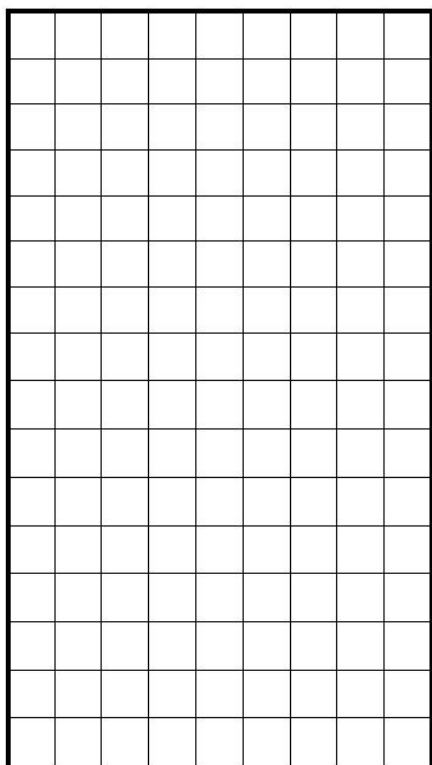
Začerni čtyři čtverečky a rozděl obrazec na devět shodných částí.



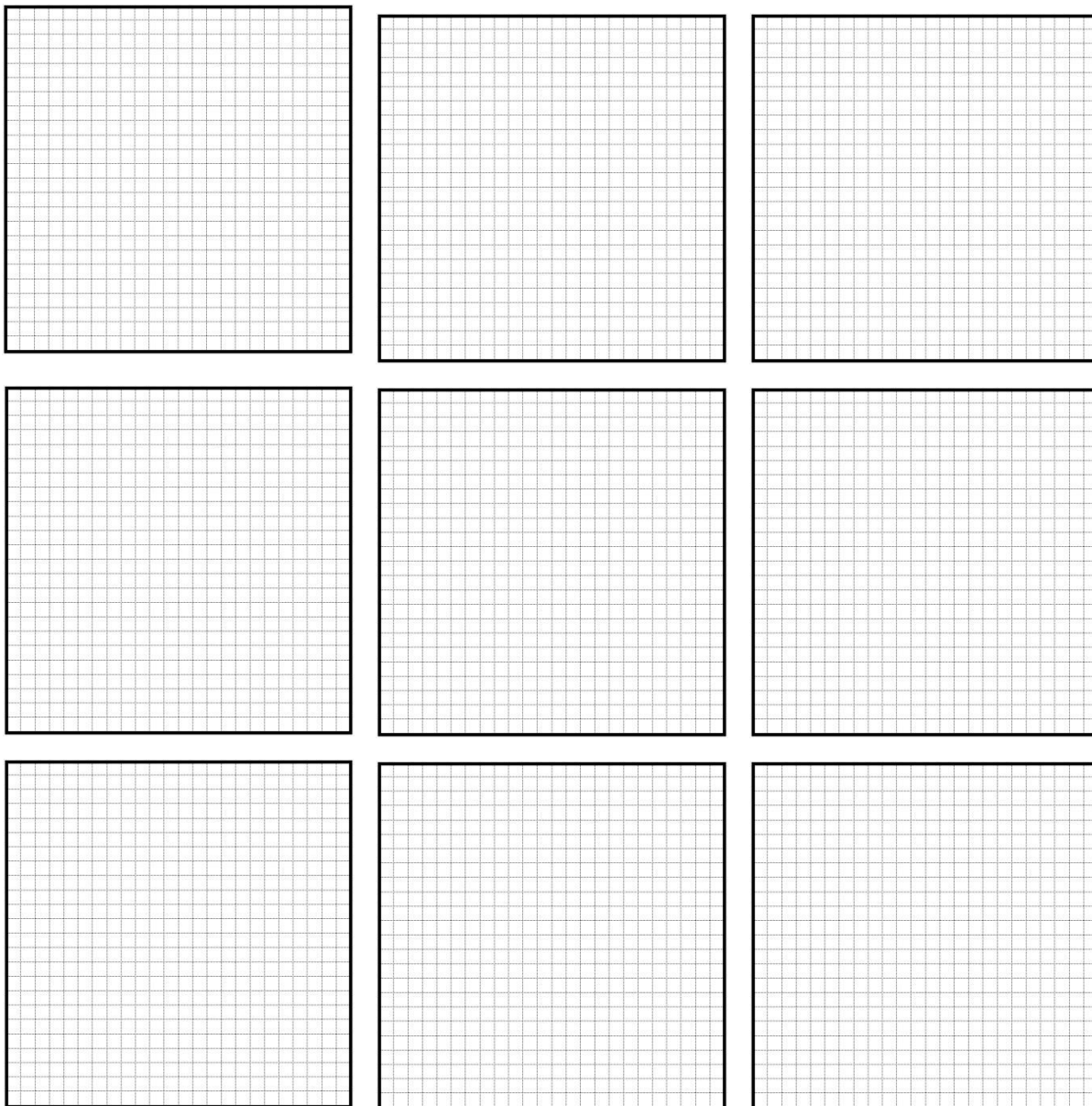
Rozděl obrazce na čtyři shodné části tak, aby v každé byla jedna hvězdička a jedno sluníčko.



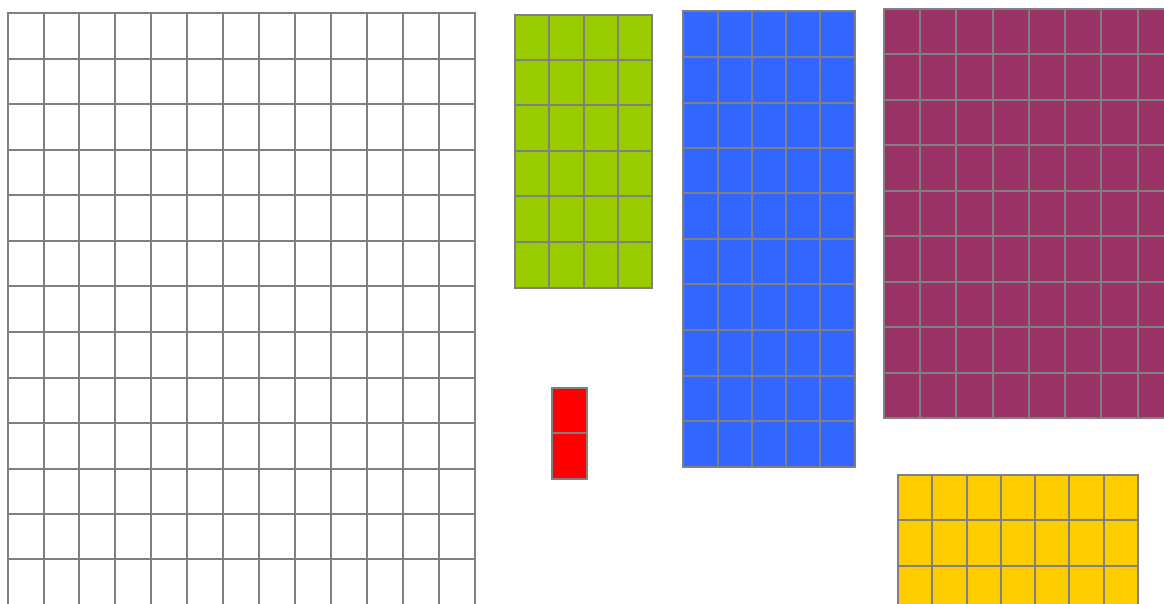
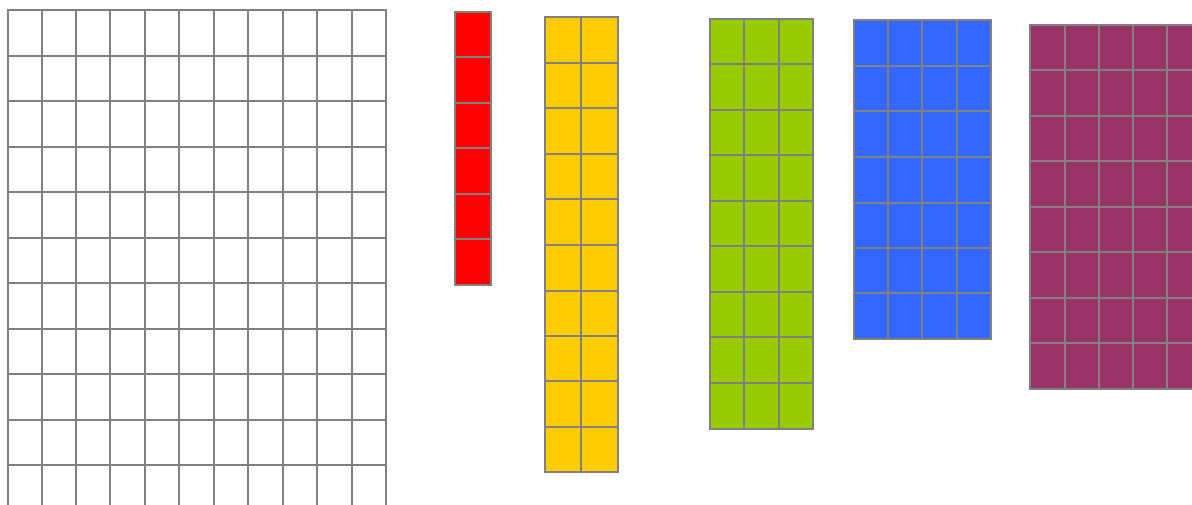
Rozděl obrazce na dvě (ne nutně shodné) části tak, abys z nich mohl složit čtverec.



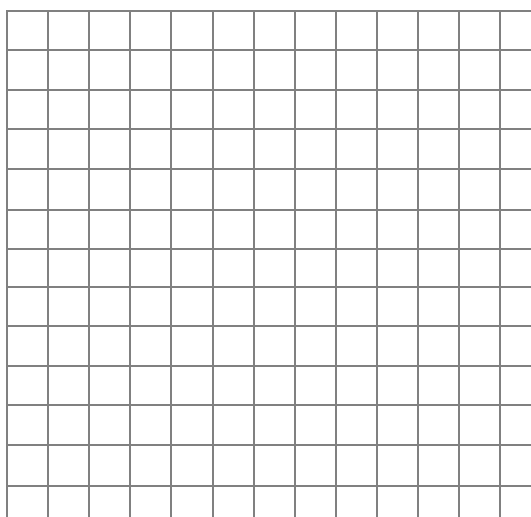
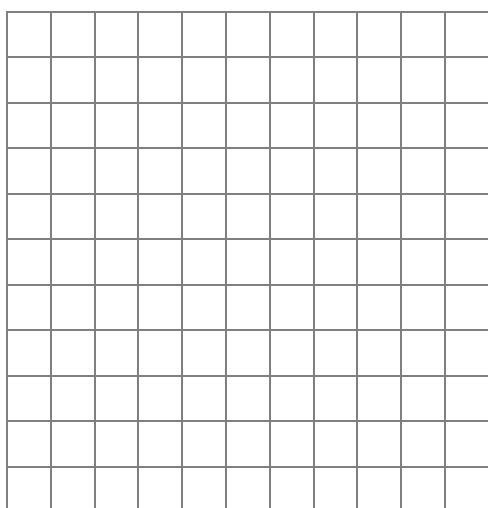
Lze rozdělit čtverec na n částí, ($n = 4, \dots, 12$), z nichž každá je rovněž čtvercem?



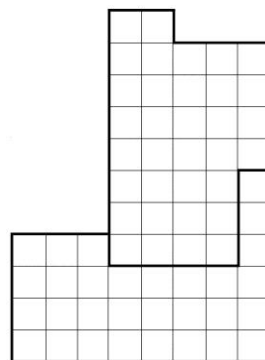
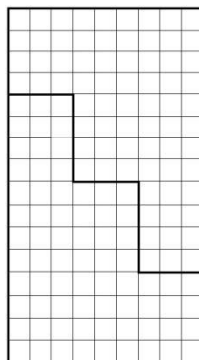
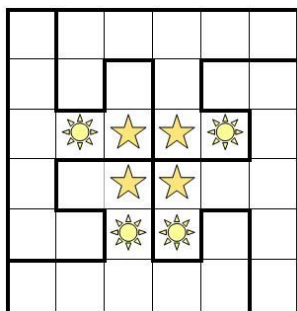
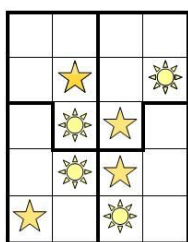
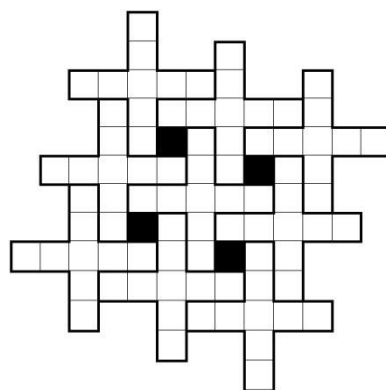
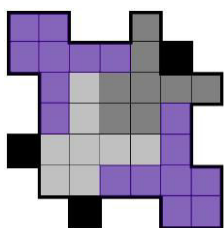
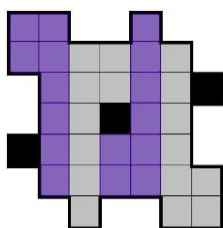
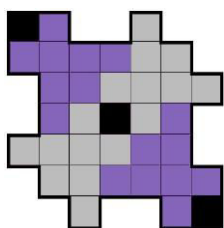
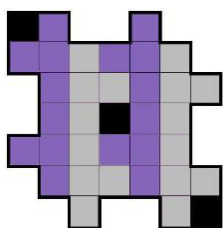
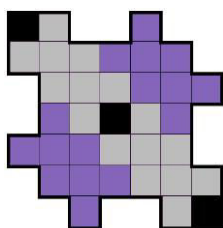
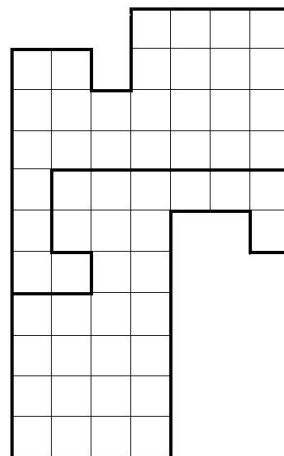
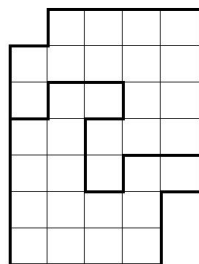
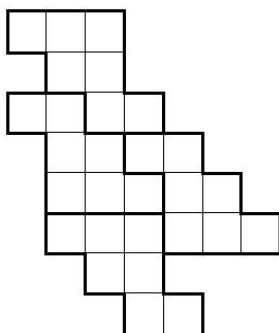
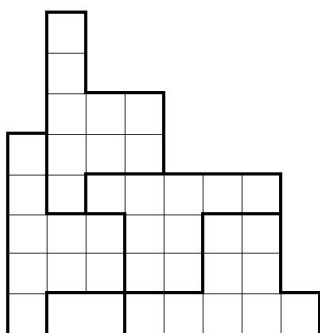
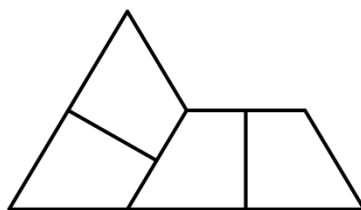
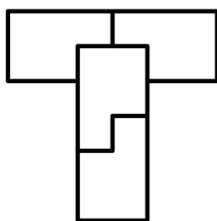
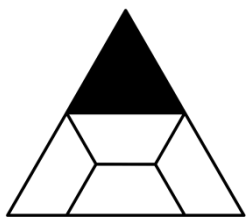
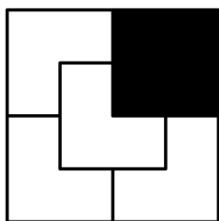
Vezměme prvních deset přirozených čísel (1, 2, ..., 10), každé pouze jednou. Je možné sestavit z nich rozměry pěti obdélníků tak, aby je bylo možné následně poskládat do čtverce?

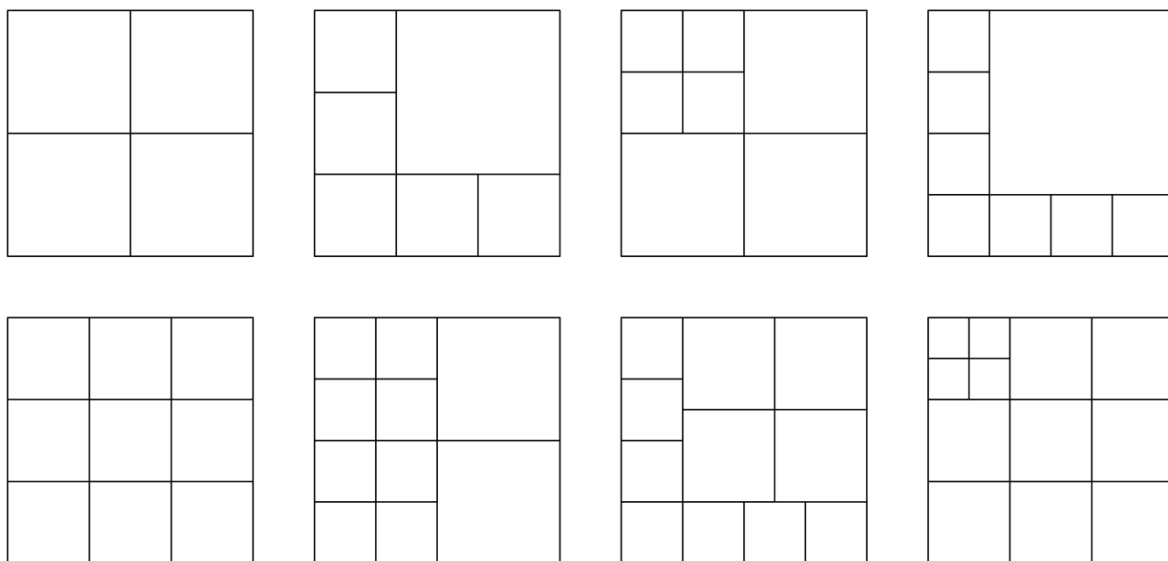


Pro zbývající dvě varianty najdi vhodné kombinace rozměrů a sestav z nich zadané čtverce:

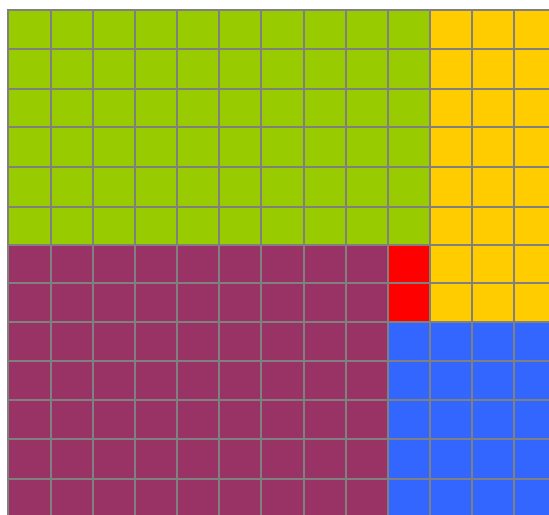
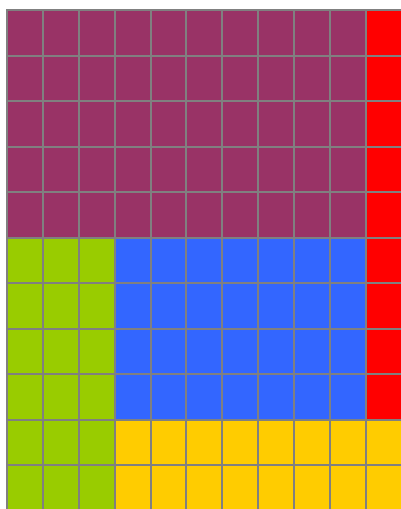
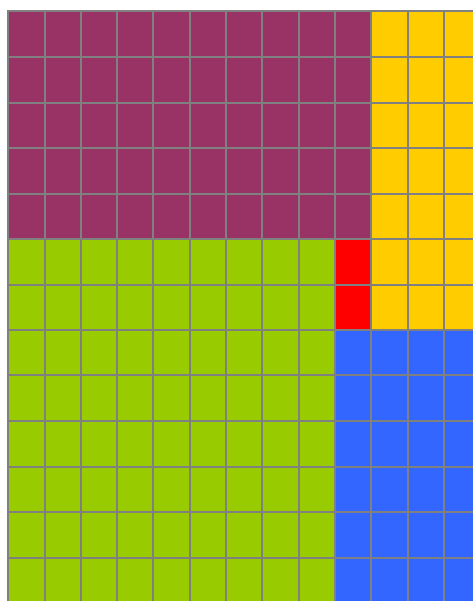
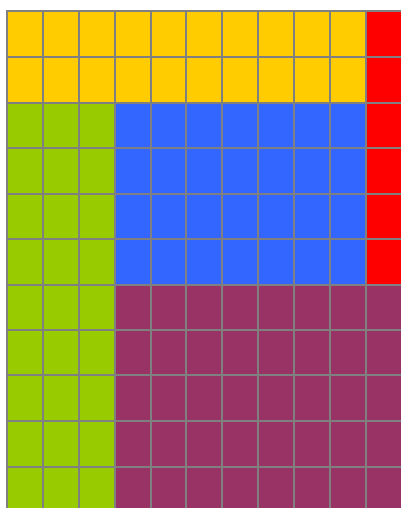


Řešení:





Rozdělit čtverec pro $n=5$ nelze.



Použité zdroje:

RYAN, Steve. *Nejlepší hlavolamy a bludiště*. Vyd. 1. Praha: Portál, 2001, 167 s. ISBN 80-7178-518-0.

VECHETA, Vladimír. *Einsteinovy hádanky a jiné hlavolamy: 111+11+1 zapeklitosť pro trénink mozku*. Vyd. 1. Brno: Computer Press, 2010, 85 s. ISBN 978-80-251-2834-3.

MOSCOVICH, Ivan. *Velká kniha hlavolamů: rébusy, hádanky, logické hry, optické klamy*. Bratislava: Perfekt, 2008. 173 s. ISBN 978-80-8046-404-2.

Aporie (antinomie)

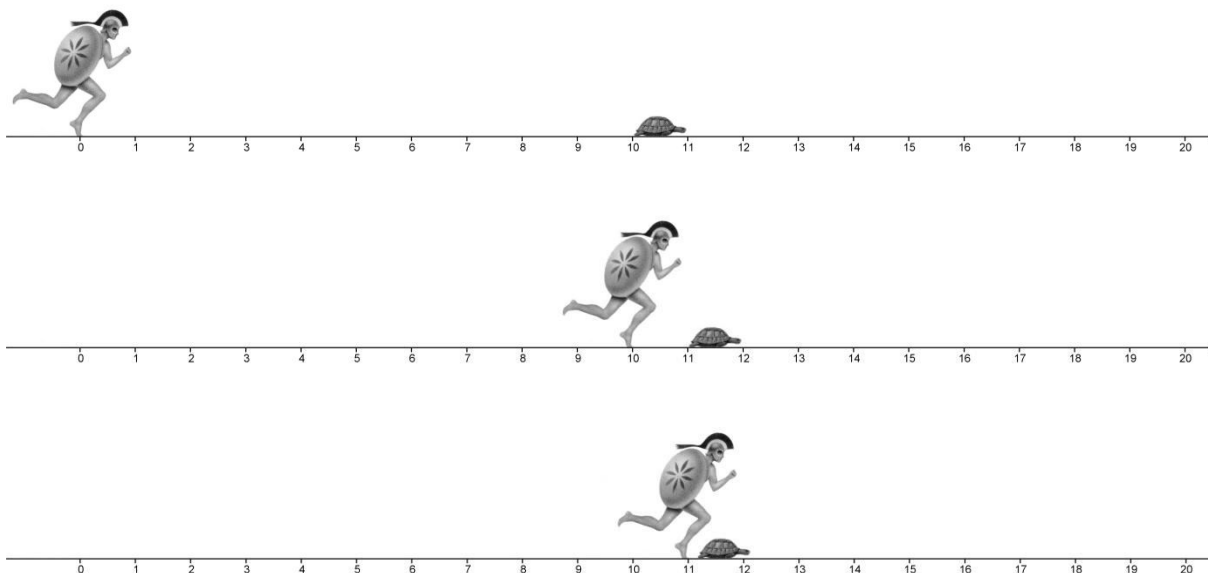
Slovo **aporie** pochází již z dob starého Řecka a vyjadřuje nějaký neřešitelný rozpor. V pozdější filozofii byl pro tyto rozpory a protimluvy zaveden Imanuelem Kantem výraz **antinomie**. Budeme se věnovat aporiím, v nichž chtěli jejich autoři ukázat nesmyslnost pojmu nekonečna a problémů, když o něčem takto nepřírozeném až zvráceném být jen uvažujeme.

V dobách starého Řecka byl svými aporiemi známý především filozof **Zénón** z Eleje a mezi jeho nejznámější patří následující tři aporie o pohybu, na nichž ukazoval, že pohyb vlastně není možný:

- 1) **Achilles a želva** – v této aporii chce bájný hrdina Achilles porazit želvu v závodě na 100 metrů. Želva je desetkrát pomalejší než Achilles, proto v rámci zachování fair play dostane 10 metrů náskok. Podle Zénóna není možné, aby Achilles tento závod vyhrál, dokonce želvu ani nedoběhne.

Argumentuje následovně. Když Achilles doběhne na místo, odkud želva startuje, je želva o 1 metr dále a stále vede. Když se Achilles dostane na toto nové místo želvy, je želva opět dále, konkrétně o 10 cm. A tak dále. Želvu tedy Achilles takto nikdy nedohoní, natož aby ji předběhl.

Pro správné pochopení je potřeba si uvědomit, že Achilles nijak nezpomaluje, nezastavuje, ani nezmenšuje kroky. Nejvhodnější představa je pravděpodobně taková, že můžeme libovolně zpomalit čas.



- 2) **Závodní okruh** – závodník chce oběhnout okruh. Zénón říká, že se mu to nikdy nemůže podařit, protože aby uběhl celý okruh, musí jistě doběhnout do jeho poloviny. Až mu bude zbývat už jen půlka tratě, tak aby ji dokončil, musí uběhnout polovinu ze zbývajících vzdálenosti. Až tedy bude ve třech čtvrtinách tratě, musí opět uběhnout polovinu ze zbývajících částí okruhu. A takto lze zbytek tratě dělit na libovolně malé kousky a závodník tak nikdy nedoběhne.



- 3) **Letící šíp** – po vystřelení šípu nastává problém, totiž že šíp vlastně neletí. V každém okamžiku si můžeme představit, že si situaci jakoby vyfotíme a vidíme šíp v určitém místě. V každém časovém okamžiku tak vidíme stojící šíp. Když ale šíp stále jen stojí, kdy tedy letí?



Tím, že v těchto aporiích Zénón připustil nekonečnou dělitelnost času a prostoru, se (jak jsme se sami přesvědčili) dostal do pro něj tehdy neřešitelných potíží a vedlo ho to tedy k přesvědčení, že žádný pohyb vlastně není možný.

V následujícím textu si ukážeme, že dnes již dokážeme tyto aporie vyřešit. K tomu ale budeme potřebovat znát něco z pokročilejší matematiky. Přesněji – poznat něco málo o posloupnostech a nekonečných řadách. Historicky musely tyto problémy počkat na své úplné vyřešení a vysvětlení až do osmnáctého století, kdy už byl v matematické analýze zaveden a používán infinitezimální počet (práce s nekonečně malými úseky, limity funkcí), za nějž vdčíme především pánům Newtonovi a Leibnizovi, a pečlivě zavedení pojmu nekonečna a práce s ním.

Začneme něčím snazším – aritmetickou posloupností – a od té se poté přesuneme ke složitějším věcem.

Použité obrázky:

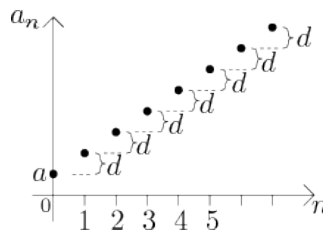
Závod Achillea se želvou [online]. ©2008 [cit. 2014-5-5]. Dostupné z:
<http://absolventi.gymcheb.cz/2008/sttezka/cssmatika/zavod.html>

Zpevněné Royalty Free Fotografie [online]. ©2014 [cit. 2014-5-5]. Dostupné z:
<http://cz.123rf.com/kliparty-vektory/zpevn%C4%9Bn%C3%A9.html>

Arrow [online]. ©2014 [cit. 2014-5-5]. Dostupné z:
<http://imgbuddy.com/>

Aritmetická posloupnost

Jde o uspořádaný soubor přirozených čísel, kde je zadaný **první člen** (značit ho budeme a_1) a každý další člen získáme tak, že k předchozímu členu přičteme dané přirozené číslo, kterému říkáme **diference** a značíme d . Druhý člen bude označen a_2 , třetí člen a_3 , a tak dále. Někjaký obecný člen pak nazýváme n -tý člen a značíme a_n , kde n je nějaké přirozené číslo. Název „aritmetická“ je pak odvozen od faktu, že každý člen této posloupnosti (kromě prvního) je aritmetickým průměrem svých dvou nejbližších sousedů.



Pro lepší představu si uvedené pojmy ukážeme na jednoduchém příkladu.

Příklad 1

Mějme aritmetickou posloupnost, kde první člen je číslo 3 a difference je číslo 6. Dostáváme pak následující členy aritmetické posloupnosti:

3; 9; 15; 21; 27; 33; 39; 45; 51; 57; a případně dále

Jak je možné se jednoduše přesvědčit, je skutečně každý člen (kromě prvního) aritmetickým průměrem svých sousedů.

Představu o aritmetické posloupnosti již máme, pokusme se tedy nyní najít odpovědi na následující otázky:

1. Jak získat n -tý člen pomocí prvního člene a difference?
2. Jak získat následující člen pomocí předchozího? (tedy najít tzv. rekurentní vztah)
3. Jak určit součet prvních n členů aritmetické posloupnosti?

Řešení:

1. Vyzkoušejme si nejprve vypsát prvních několik členů. Jak napsat obecný n -tý člen z toho pak jasně vyplýne.

$$a_1,$$

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_1 + 2 \cdot d,$$

$$a_4 = a_1 + 3 \cdot d, \text{ atd.}$$

Jak vidíme, můžeme vysledovat, že n -tý člen dostaneme tak, že k prvnímu členu aritmetické posloupnosti přičteme $(n - 1)$ diferencí.

Zapsáno vztahem: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

2. Odpověď na tuto otázku je velmi jednoduchá, následující člen se pomocí předchozího dostane tak, že k tomu předchozímu přičteme diferenci, tedy:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

3. Tahle otázka je už poněkud složitější a stojí za zmínku jedna historická poznámka. Traduje se, že podobný úkol dal jednou jeden učitel svému zvědavému žáčkovi s nadějí, že chlapce zaměstná na zbytek hodiny. Řekl chlapci, aby sečetl všechna přirozená čísla od 1 do 100. Chlapec se ale po chvíli přihlásil se správným výsledkem. To učitele velmi udivilo a zeptal se, jak na to tak rychle přišel. Chlapec učiteli vysvětlil, že jednoduše pároval dohromady čísla tak, aby dostával součet 101. Tedy např. 1+100, 2+99, 3+98, atd. Pak si jen stačilo uvědomit si, že těchto součtů je možné takto získat přesně 50. Velmi snadno a rychle se tak dostane součet, který činí v tomto případě 5050. Zvědavý žák se jmenoval Carl Friedrich Gauss, kterého jistě znáte jako slavného německého matematika a fyzika.



Z uvedené historky můžeme snadno vyčíst, jak lze sečíst prvních n členů aritmetické posloupnosti a tento součet, který označíme s_n zapsat obecným vztahem:

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Tento vztah by někomu mohl připadat podezřelý, protože v něm zdánlivě nevystupuje difference aritmetické posloupnosti, na které ale daný součet jistě musí záviset. Pozorný čtenář ale jistě snadno odhalí, že difference je skryta v členu a_n , který lze vyjádřit pomocí prvního členu dané aritmetické posloupnosti a difference, jak už víme z otázky číslo 1.

Příklad 2

Vypočítejte součet prvních 4 členů z příkladu 1.

Řešení:

Použijeme výše zjištěný vztah, konkrétně tedy pro $n = 4$, první člen je 3 a čtvrtý 21:

$$s_4 = \frac{4 \cdot (a_1 + a_4)}{2} = \frac{4 \cdot (3 + 21)}{2} = \underline{\underline{48}}$$

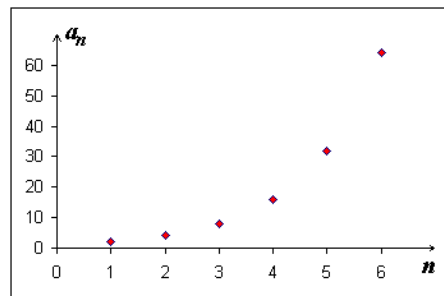
Použité obrázky:

Math Tutor - Sequences [online]. ©2014 [cit. 2014-5-10]. Dostupné z:
<http://math.feld.cvut.cz/mt/txta/1/txc3aa1c.htm>

Johann Carl Friedrich Gauss [online]. ©2008 [cit. 2014-5-10]. Dostupné z:
<http://www.rare-earth-magnets.com/johann-carl-friedrich-gauss/>

Geometrická posloupnost

Tato posloupnost je v určitém ohledu podobná aritmetické, kterou již dobře známe, jen ke členům nebudeme přičítat diferenci, ale budeme je násobit nějakým racionálním číslem, které budeme nazývat **kvocient** a označovat písmenem **q** . Název „geometrická“ má tato posloupnost z podobného důvodu jako předchozí posloupnost aritmetická. Každý člen geometrické posloupnosti (kromě prvního) je geometrickým průměrem dvou nejbližších sousedních členů.



Uvedeme si tentokrát dva příklady, na kterých si názorně ukážeme nové pojmy.

Příklad 3

Mějme geometrickou posloupnost, kde její první člen je číslo 3 a kvocient je číslo 2. Členy této geometrické posloupnosti jsou pak následující:

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, a případně další

Příklad 4

Mějme geometrickou posloupnost, kde její první člen je číslo 8 a kvocient je číslo $\frac{1}{2}$. Členy této geometrické posloupnosti jsou pak následující:

8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, a případně další

Podobně jako u předchozího typu posloupnosti můžeme i zde zopakovat stejné otázky:

1. Jak získat n -tý člen pomocí prvního člene a kvocientu?
2. Jak získat následující člen pomocí předchozího? (tedy najít tzv. rekurentní vztah)
3. Jak určit součet prvních n členů geometrické posloupnosti?

Řešení:

1. Opět si pomůžeme vypsáním prvních několika členů.

$$a_1,$$

$$a_2 = a_1 \cdot q,$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2,$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3, \text{ atd.}$$

Odtud vidíme, že n -tý člen zřejmě získáme tak, že první člen vynásobíme $(n - 1)$ krát kvocientem. Zapsáno pomocí mocniny kvocientu tedy první člen budeme násobit výrazem q^{n-1} .

Obecný vztah: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

2. I zde je odpověď podobně snadná jako u předchozího typu posloupnosti. Následující člen geometrické posloupnosti dostaneme z předchozího vynásobením kvocientem:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

3. Dostat se ke vztahu pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti může chvíli zabrat. Obzvlášť, pokud nás nenapadá, jak na to. Zkusme si nejprve tento součet zapsat. Značit ho budeme stejně jako u aritmetické posloupnosti s_n .

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}$$

Když tuto rovnici vynásobíme kvocientem (což je velmi umělý krok, který nás pravděpodobně normálně nenapadne), dostaneme:

$$s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n$$

Odečtením této první uvedené rovnice od druhé dostaneme:

$$s_n \cdot q - s_n = a_1 \cdot q^n - a_1$$

Odtud už vytknutím a vydělením dostaneme konečný vztah:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Příklad 5

Určete součet prvních 8 členů geometrické posloupnosti

- z příkladu 3,
- z příkladu 4.

Řešení:

Využijeme získaný vztah, kde pro náš konkrétní případ bude $n = 8$.

- První člen je 3, kvocient je 2.

$$s_8 = 3 \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot \frac{256 - 1}{1} = \underline{\underline{765}}$$

- První člen je 8, kvocient je $\frac{1}{2}$.

$$s_8 = 8 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 8 \cdot \frac{\frac{1}{256} - 1}{-\frac{1}{2}} = 8 \cdot \frac{-\frac{255}{256}}{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{255}{16}}}$$

Použité obrázky:

Posloupnosti a řady - Geometrická [online]. ©2011 [cit. 2014-5-12]. Dostupné z:

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/posloupnosti_a_rady/specialni.php?kapitola=geometricka

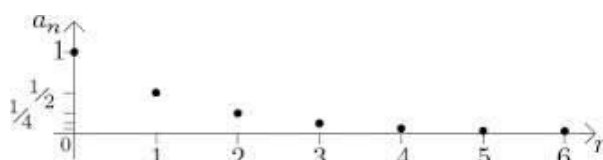
Nekonečná geometrická řada a její součet

Nekonečná geometrická řada je vlastně geometrická posloupnost, která ovšem nikde nekončí, pokračuje do nekonečna. Představit si ji můžeme jako posloupnosti v příkladech 3 a 4 v minulé sekci, jen místo „atd.“ budou „tři tečky“, čímž bude naznačeno, že posloupnost v nastaveném duchu pokračuje do nekonečna.

Pro vysvětlení řešení Zénónových aporií budeme potřebovat tuto řadu umět sečíst. K tomu je ovšem zapotřebí znát něco o limitách. Tohle ve starém Řecku samozřejmě nevěděli, nekonečna se báli a rozhodně neuměli sečíst něco, co nikde nekončí. My si zkusíme vysvětlit, o co půjde, i bez toho, že budeme přesně zavádět pojem limita.

Představme si součty, které jsme počítali v předchozí části v příkladech 3 a 4. Můžeme je použít i v případě, že je řada nekonečná. Budeme je nazývat částečné součty řady. Jistě je v našich silách představit si, že když vezmeme nejprve první člen samotný, máme nějaký konkrétní součet. Když k němu přidáme druhý člen, zase jiný, ale konkrétní součet. Pak přidáme postupně třetí člen, čtvrtý, a tak dále. Často se nám stane, že tyto částečné součty budou na velikosti velmi rychle přibývat a bude jasné, že jejich půjde do nekonečna. Když si ale vezmeme příklad 4 z minulé části, uvidíme, že nárůst těchto částečných součtů se postupně zpomaluje a dává tak naději, že se nakonec přes nějakou hodnotu nedostane. Je tomu skutečně tak. V čem se liší příklady 3 a 4? V prvním členu (na kterém ale jistě nebude záležet, jestli se součet někde zastaví) a hlavně v kvocientu. Právě na hodnotě kvocientu záleží, jestli řada bude mít konečný nebo nekonečný součet. Dá se odhadnout (a skutečně tomu tak je), že jakmile bude kvocient větší než číslo 1, pak nám celkový součet bude odbíhat do nekonečna (divergovat), zatímco když bude někde v rozmezí mezi čísly 0 a 1, pak se součet bude blížit nějaké konečné hodnotě (konvergovat).

Této podmínce se říká **nutná podmínka konvergence** a zapisuje se $|q| < 1$, $q \neq 0$. V takto zapsané podmínce připouštíme i záporný kvocient. Jak by řada



v případě záporného kvocientu vypadala, si můžete vyzkoušet sami, tato varianta je ovšem pro naše potřeby nezajímavá, podrobněji se jí tedy zabývat nebudeme. Nulový kvocient jsme vyloučili z toho důvodu, že pak by zřejmě šlo o řadu samých nul (až na první člen) a situace by opět nebyla nijak zajímavá.

Intuitivní představu tedy máme a nyní si rovnou řekněme výsledek, ke kterému se dojde po avizovaném limitním přechodu částečných součtů. Dostaneme pak výsledný vztah ve tvaru:

$$s = \frac{a_1}{1 - q}$$

Použité obrázky:

Posloupnosti a řady [online]. ©2014 [cit. 2014-5-15]. Dostupné z:
<http://math.feld.cvut.cz/mt/txta/1/txc3aa1c.htm>

Řešení aporií

Nyní máme vše připraveno k tomu vyřešit první a druhou aporii.

První aporie je o vyřešení tehdy nemožného – totiž sečíst nekonečně mnoho členů. My už ale víme, že v aporii jsou dané vzdálenosti členy nekonečné geometrické řady, kde první člen je 10 (metrů), druhý 1 (metr), třetí 0,1 (metru), a tak dále. Součet této řady existuje (neboť kvocient je číslo $\frac{1}{10}$). Dosadíme-li do vztahu pro součet nekonečné geometrické řady, dostaneme:

$$s = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{\frac{9}{10}} = 11\frac{1}{9}$$

Achilles tedy želvu dožene po $11\frac{1}{9}$ metrech.

V druhé aporii je problém velmi podobný – běžec nejprve musí uběhnout polovinu tratě, poté čtvrtinu, pak osminu, a tak dále. Dostáváme tak vlastně geometrickou řadu $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$. První člen je tedy $\frac{1}{2}$ a kvocient je rovněž $\frac{1}{2}$. Je splněna nutná podmínka konvergence této řady, použijeme tedy výše uvedený vztah pro součet a dostáváme velmi jednoduchý výpočet:

$$s = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{1}}$$

Dostáváme tak, že běžec trať uběhne, neboť když sečteme všechny úseky okruhu, které podle Zénóna musí běžec uběhnout, vyjde nám, že uběhl celou trať.

Poslední zmiňovanou aporii s letícím šípem vyřešíme poměrně snadno tím, že si uvědomíme, že fyzikální vlastnost šípu není pouze jeho poloha, ale že pro určení stavu tohoto tělesa je v klasické mechanice zapotřebí udat polohu a hybnost (tedy skalární součin hmotnosti a vektoru rychlosti). Právě z toho důvodu, že šíp nemá v daném okamžiku nulovou hybnost, nelze o něm uvažovat jen jako o nehybném objektu v každém okamžiku stojícím v určitém místě prostoru.

Magické čtverce

Magický čtverec je skupina buněk vyplněných přirozenými čísly, zpravidla řadou čísel od 1 do čísla rovného počtu buněk. Například magický čtverec 5x5 by obsahoval čísla od 1 do 25. Čísla v obrazci však musí být umístěna specifickým způsobem. Totiž tak, že **součet čísel** v každé řadě a v každém sloupci (často také v obou úhlopříčkách) musí být stejný. Tento součet se pak nazývá **magická konstanta**.

Řádem magického čtverce pak rozumíme počet buněk na jedné straně čtverce. Již zmíněný čtverec 5x5 je tedy řádu 5. Velmi rychle se dá zjistit, že magický čtverec řádu 2 neexistuje.

Příklad 1.

Pokuste se sestavit magický čtverec řádu 3 (s číslicemi 1 až 9).

Řešení:

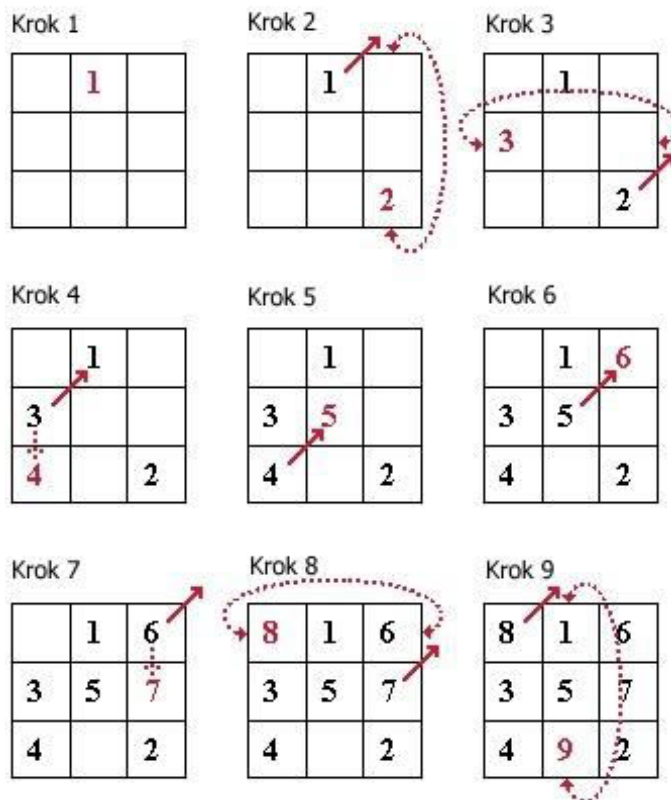
8	3	4
1	5	9
6	7	2

Při řešení bychom měli uvažovat nad několika věcmi. Zamyslet se nad tím, jaká je magická konstanta tohoto čtverce. Když sečteme všechna čísla od 1 do 9, dostaneme 45. Čísla se mají rozdělit do 3 řad a sloupců. To znamená, že magická konstanta je číslo 15. Tento součet z daných číslic dostaneme pouze následujícími způsoby: 9+5+1, 9+4+2, 8+6+1, 8+5+2, 8+4+3, 7+6+2, 7+5+3, 6+5+4.

Číslice uprostřed čtverce se objevuje ve čtyřech situacích (1 řádek, 1 sloupec, 2 úhlopříčky). Jediná číslice, která se vyskytuje ve vypsání součtech čtyřikrát, je číslo 5. Musí být tedy uprostřed čtverce. Protože číslo 9 je součástí pouze dvou vypsání součtů, musí být číslo 9 uprostřed řádku nebo sloupce. Podobně budeme uvažovat u čísel 3 a 7. Zbývají nám čtyři číslice (2, 4, 6, 8), které už ale mohou být umístěny pouze jediným možným způsobem, aby byly podmínky zadání splněny.

Ukazuje se, že magický čtverec 3x3 existuje pouze jeden (až na případné jiné otočení nebo zrcadlení). Různých variant s rostoucím řádem však rychle přibývá. Magických čtverců řádu 4 už lze sestavit 880 různých typů, pro řád 5 jsou již možností miliony.

Existuje poměrně jednoduchý návod na konstrukci magického čtverce lichého řádu. Začneme číslicí 1 uprostřed horního řádku. Další číslice budeme postupně psát do políčka šikmo vpravo vzhůru od předchozího pole. Dostaneme-li se mimo čtverec, představíme si vedle něj připojený další a číslo napíšeme na příslušné místo původního čtverce. Pokud je cílové políčko již obsazené, místo pohybu šikmo vpravo vzhůru napíšeme číslici přímo pod pole, kam jsme naposledy umístili číslici. Názorně tento postup ukazují následující obrázky pro řád 3 a 9.



47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35

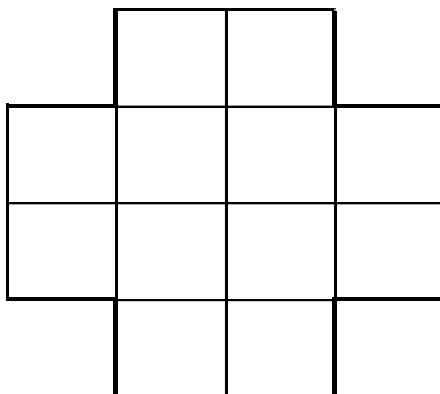
Příklad 2.

Pomocí návodu na předchozí straně vytvořte magický čtverec řádu 5 a 7.

Magické čtverce nemusí mít vždy přímo tvar čtverce. Na ukázkou si zkuste následující příklad.

Příklad 3.

Vyplňte buňky v následujícím schématu čísly 1 až 12 tak, aby se v žádné řadě, sloupci ani úhlopříčce neobjevila dvě po sobě jdoucí čísla.



Řešení:

	3	12	
1	8	5	10
4	11	2	7
	6	9	

nebo třeba

	8	11	
6	1	4	9
3	10	7	12
	5	2	

Při podrobnějším pohledu na tato řešení jistě přijdete na to, jakým způsobem jsme se dostali k cíli. Polohu číslice 1 si zvolíme libovolně. Další čísla klademe do obrazce tak, jako bychom se pohybovali figurou koně po šachovnici, tedy do písmene L.

Za zmínku ještě stojí tzv. **Dürerův magický čtverec** pojmenovaný podle německého umělce Albrechta Dürera, který zobrazil roku 1514 magický čtverec řádu 4 ve své rytině Melancholia. Jde o magický čtverec, který ještě více magický, než jak definice přikazuje. Tento magický čtverec měl následující podobu.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Tento čtverec nejen, že splňuje podmínku stejných součtů ve všech řádcích, sloupcích a dvou hlavních úhlopříčkách, ale je zajímavější tím, že stejný součet (34) je i v malých čtvercích 2x2 vlevo nahoře, vpravo nahoře, vlevo dole, vpravo dole a ve čtverci centrálním.

Příklad 4.

Rozmístěte čísla 1 až 8 a -1 až -8 do čtverce 4x4 tak, aby byl součet v každém řádku, v každém sloupci a v obou úhlopříčkách roven nule.

Řešení:

-1	3	2	-4
5	-7	-6	8
-8	6	7	-5
4	-2	-3	1

Řešení dostaneme z Dürerova magického čtverce odečtením 17 od hodnot větších než 8.

Latinské čtverce

Ke konci života vymyslel slavný švýcarský matematik Leonhard Euler nový typ magického čtverce, tzv. **latinský čtverec**.

Latinský čtverec řádu n je čtvercové schéma, které má celkem n^2 políček. V každém políčku je pak jeden z n objektů (písmen, čísel, barev,...) umístěn tak, že každý řádek i sloupec obsahuje právě jeden tento objekt.

Pro lepší představu si zkusíme zapsat latinský čtverec řádu 5 a doplňované objekty bude prvních pět písmen abecedy (a, b, c, d, e).

a	b	c	d	e
e	a	b	c	d
d	e	a	b	c
c	d	e	a	b
b	c	d	e	a

Existují latinské čtverce, ve kterých se stejný prvek nesmí vyskytovat ani v obou hlavních úhlopříčkách, nebo dokonce ani v žádné z menších úhlopříček.

Další spleť lze nalézt v tzv. **ortogonálních latinských čtvercích**. To jsou čtverce, které když je položíme na sebe, budou splňovat podmínku, že každé políčko obsahuje jeden prvek z každého z původních latinských čtverců a každý prvek jednoho čtverce je s každým prvkem z druhého čtverce kombinován právě jednou a každá řada i sloupec obsahuje každý prvek z obou čtverců. Pro představu opět přidáme jednoduchý příklad.

1	2	3	+	a	b	c	=	1a	2b	3c
3	1	2		b	c	a		3b	1c	2a
2	3	1		c	a	b		2c	3a	1b

Latinské a ortogonální latinské čtverce nejsou jen pouhou formou zábavy, ale mají i hodnotná použití, například v experimentální vědě. Představme si třeba zemědělský výzkum, který testuje účinek sedmi typů fungicidů na pšenici. Testované pole by mohlo být rozděleno na sedm rovnoběžných pruhů, z nichž každý by byl ošetřen jiným fungicidem. Takový test by ale mohl být zkreslený, protože podmínky jednotlivých pásů nemusí být nutně totožné, co se týče všech možných faktorů (teplota, vlhkost, kvalita půdy, množství živočichů v zemi, odtok vody,...). Rozhodně lepší způsob je rozdělit pole na 49 částí ve čtvercovém schématu a aplikovat fungicidy podle principu latinského čtverce. Tímto způsobem je každá chemikálie otestována ve všech podmínkách v rámci celého pole. Pokud by navíc bylo potřeba testovat fungicidy na sedmi různých druzích pšenice, bylo by možné použít ortogonální latinské čtverce.

Takto se Eulerova rekreační úloha stala široce užívanou experimentální metodou nejen v hospodářství, ale třeba také v biologii, sociologii, marketingu a lékařství. Políčko ve čtverci pak samozřejmě nemusí znamenat kus zemědělské půdy, ale třeba list, pacient, město či časový úsek. Latinský čtverec je jednoduše způsobem kombinování proměnlivých prvků jedinečnými způsoby.

V následujících příkladech se vrátíme k ortogonálním latinským čtvercům. Konkrétně ke slavné Eulerově úloze o 36 důstojnících. Tato úloha spočívala v sestavení 36 důstojníků šesti různých hodnotí (v rámci jednoho pluku) a z celkem šesti různých pluků do čtverce 6x6 tak, aby v žádném zástupu a v žádné řadě nebyli dva důstojníci stejné hodnoti nebo ze stejného pluku.

Pokud úlohu přeformulujeme pro 9 důstojníků, máme řešení této situace na předchozí stránce, kde číslicemi 1, 2, 3 můžeme myslet tři různé hodnoti a písmeny a, b, c tři různé pluky.

1a	2b	3c
3c	1a	2b
2b	3c	1a

Upozorníme na fakt, že třeba čtverec není vyhovujícím řešením, neboť v něm máme vlastně jen 3 osoby (1a, 2b, 3c) místo devíti (1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 3c).

Příklad 1.

Sestavte do čtverce 4x4 16 důstojníků ze čtyř různých pluků a celkem čtyř různých hodnotí, kde v každém ze čtyř pluků jsou právě čtyři důstojníci čtyř různých hodnotí, tak, aby v žádné řadě a v žádném zástupu nebyli dva důstojníci ze stejného pluku nebo stejné hodnoti.

Řešení:

1a	2b	3c	4d
3d	4c	1b	2a
4b	3a	2d	1c
2c	1d	4a	3b

Příklad 2. (Eulerova úloha o 36 důstojnících)

Sestavte do čtverce 6x6 36 důstojníků ze šesti různých pluků a celkem šesti různých hodnotí, kde v každém ze šesti pluků je právě šest důstojníků šesti různých hodnotí, tak, aby v žádné řadě a v žádném zástupu nebyli dva důstojníci ze stejného pluku nebo stejné hodnoti.

Řešení:

Tato Eulerova úloha je velmi slavná i proto, že ji nelze vyřešit. Což je celkem odvážné tvrzení, vezmeme-li v úvahu, co jsme řekli o počtech možných magických čtverců v minulé kapitole. Skutečně, pokud bychom se zajímali o množství latinských čtverců řádu 6, dostáváme se k číslu přibližně 25 miliónů. Neexistenci řešení dokázal v roce 1900 francouzský celní inspektor Gaston Tarry právě tím, že porovnal všechny možnosti. To byl jistě velmi úctyhodný výkon vzhledem ke zmíněnému množství možností.

Světoví a čeští vědci

Žáci vyššího stupně základní školy (v našem případě žáci 6. a 7. ročníku) měli za úkol připravit si krátkou prezentaci s medailonkem nějakého světového či českého vědce z různých oblastí přírodních věd (fyzika, matematika, chemie, biologie). Bylo jim doporučeno, aby se vyhnuli příliš známým jménům jako třeba Albert Einstein, Isaac Newton, T. A. Edison a dalším. To z toho důvodu, že takové osoby jsou známe poměrně dost a každý zhruba ví, o koho se jedná. Je jistě dobré svůj seznam významných osob vědecké obce rozšířit. Což znamená poznat i jiná jména a další poznatky, o které lidstvo obohatili.

Další doporučení se týkalo toho, aby vybrané osoby byly z modernější doby než staré Řecko, řekněme tedy osoby žijící a bádající od 15. století do současnosti. Na ukázkou uvedeme několik výtažků z těchto žákovských prezentací.

Philipp Eduard Anton von Lenard

Narodil se 7. 6. 1862 v Bratislavě. Byl to německý fyzik maďarského původu. Jeho rodina se do Bratislavy přestěhovala z Tyrolska. Byl velkým nacionalistou a antisemitou, ve dvacátých letech dvacátého století podporoval Adolfa Hitlera. Zemřel 20. 5. 1947 v německém Messelhausenu.

V Budapešti a ve Vídni studoval chemii a fyziku, poté přesunul svá studia fyziky do Berlína a Heidelbergu. V roce 1886 získal doktorát na univerzitě v Heidelbergu. V roce 1896 se stal profesorem teoretické fyziky na univerzitě v Heidelbergu. V letech 1898 až 1907 byl profesorem na univerzitě v Kielu. Od roku 1919 vedl nově zřízený radiobiologický ústav v Heidelbergu.



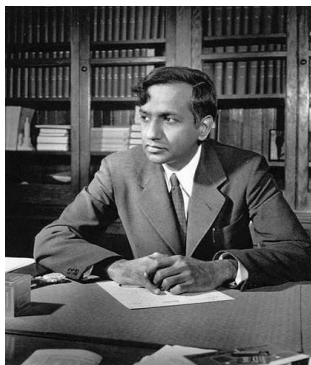
V roce 1893 prokázal, že katodové paprsky (objevené v roce 1859 německým fyzikem J. Plückerem) nemusí existovat jen ve výbojové trubici. Zjistil, že nositelé elektrického náboje katodových paprsků jsou elektrony. V roce 1900 vypracoval dynamickou teorii těles v mnoha bodech společnou s Rutherfordovým modelem atomu.

V roce 1902 Lenard objevil zákonitost fotoelektrického jevu (energie fotoelektronů závisí na frekvenci a nezávisí na intenzitě dopadajícího světla). Tato intenzita určuje jen počet elektronů uvolněných za jednotku času. Zjistil, že vzduch se ultrafialovými paprsky ionizuje (ionizace je proces, při kterém se z elektricky neutrálního atomu nebo molekuly stává iont), a tím se stává elektricky vodivým.

Získal mnoho ocenění např. v roce 1896 mu byla udělena Rumfordova medaile královské společnosti, v roce 1905 obdržel Nobelovu cenu za fyziku za výzkum katodového záření, získal Franklinovu medaili (1932), Orlí štít Německé říše (1933).

Subrahmanyan Chandrasekhar

Subrahmanyan Chandrasekhar byl americký astrofyzik a matematik indického původu. Narodil se 19. října 1910 v Lahore, v tehdejší Britské Indii (dnešní oblast Pakistánu). Slovo Chandra v sanskrtu znamená „měsíc“ nebo též „zářící“ a je poměrně běžným jménem v etnické skupině Tamilů (etnická skupina v Indii a v severovýchodní části Srí Lanky). Jeho jméno je často zkracováno pouze na Chandrasekhar, nebo dokonce jen Chandra. Zemřel 21. srpna 1995 v Chicagu.



Studoval na vysoké škole Presidency College v Chennai (východní Indie) v letech 1925 až 1930, kdy v červnu roku 1930 získal svůj bakalářský titul (B.Sc.) ve fyzice. V osmnácti letech mu významný vědecký časopis uveřejnil článek a to mu otevřelo cestu ke studiu na univerzitě v Cambridge. Indii opustil v roce 1930. V létě roku 1933 získal Chandrasekhar titul Ph.D. v Cambridge.

V lednu 1937, byl Chandrasekhar pozván na Chicagskou univerzitu doktorem Otto Struvem na místo pomocného profesora. Nabídku přijal a se svojí ženou odcestoval do Ameriky a stal se učitelem na Chicagské univerzitě. Na této univerzitě pak působil po celý zbytek života. V roce 1952 získal titul profesora teoretické astrofyziky a v roce 1985 dosáhl statutu emeritního profesora. V roce 1953 se i se svou manželkou oba stali americkými občany.

Chandrasekharovou největší profesní životní láskou bylo studium vesmíru, zejména se zabýval studiem závěrečných stádií vývoje hvězd – tzv. bílými trpaslíky. Díky tomu, že byl rovněž vynikající matematik, tak můžeme říci, že předběhl svou dobu v hypotéze, která v sobě spojovala dosavadní teorii bílých trpaslíků a Einsteinovu speciální teorii relativity. Zkombinováním došel i pro něj k překvapivému závěru. Totiž že bílý trpaslík není jedinou možností závěrečného stádia vývoje hvězdy. Odvodil a v roce 1930 během své cesty z Indie do Anglie spočítal hodnotu pro velikost hmotnosti hvězdy, při které dojde buď k výbuchu hvězdy (supernova) a vzniku neutronové hvězdy, nebo dojde k vytvoření tzv. černé díry. Tomuto závěru se nechtělo věřit ani výrazné a uznávané části tehdejší fyzikální obce (jako tomu bylo v historii už mnohokrát dříve). Trvalo několik desetiletí, než byl Chandrův výsledek uznán a obecně přijat.

Dnes se hodnotě hmotnosti (1,44 násobek hmotnosti Slunce), při které dojde k výše řečenému (výbuchu supernovy nebo vzniku černé díry), říká na jeho počest Chandrasekharova mez. Spolu s Williamem A. Fowlerem získal Nobelovu cenu za fyziku v roce 1983 právě za práci týkající se fyzikálních procesů důležitých pro strukturu a vývoj hvězd.

Dnes je Subrahmanyan Chandrasekhar považován za jednoho z nepřednějších astrofyziků dvacátého století.

František Nachtikal

František Nachtikal byl českým fyzikem a pedagogem. Narodil se 1. prosince 1874 v Kralovicích u Plzně, zemřel 12. dubna 1939 v Praze.



Vystudoval gymnázium v Klatovech, poté Filosofickou fakultu Karlovy univerzity a po získání doktorátu ještě po jednom semestru na universitě v Göttingenu a Sorbonně.

V letech 1899-1902 učil na středních školách, v roce 1900 se přestěhoval do Brna a učil dalších do roku 1921 na vyšší státní průmyslové škole v Brně. V letech 1921-1926 působil jako profesor na brněnské technice, poté se přestěhoval do Prahy, kde pokračoval v práci na ČVUT. Byl ale také například propagátorem teorie relativity a jedním ze zakládajících členů Československé statistické společnosti.

František Nachtikal je autorem několika učebnic fyziky pro různé typy středních škol. Práce z matematiky publikoval zejména na začátku svého tvůrčího období, potom pracoval především ve fyzice. Jeho hlavním oborem byla akustika a pružnost. Během svého působení na vysoké škole vydal pro své studenty několik vysokoškolských učebnic, například *Fyzika teoretická*.

Použité obrázky:

Philipp Lenard [online]. ©2014 [cit. 2014-5-20]. Dostupné z:
<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/335806/Philipp-Lenard>

Subrahmanyan Chandrasekhar [online]. ©2014 [cit. 2014-5-20]. Dostupné z:
http://en.wikipedia.org/wiki/Subrahmanyan_Chandrasekhar

Subrahmanyan Chandrasekhar [online]. ©2014 [cit. 2014-5-20]. Dostupné z:
<http://summer-astronomy-pc.wikispaces.com/Subrahmanyan+Chandrasekhar>

František Nachtikal [online]. ©2014 [cit. 2014-5-20]. Dostupné z:
http://encyklopedie.brna.cz/home-mmb/?acc=profil_osobnosti&load=14385

Použité zdroje:

http://en.wikipedia.org/wiki/Philipp_Lenard

https://web.math.muni.cz/biografie/frantisek_nachtikal.html

<http://summer-astronomy-pc.wikispaces.com/Subrahmanyan+Chandrasekhar>

Šifrování a kódování

Výuka matematiky a přírodních věd na školách často působí dojmem, že probírané poznatky nejsou nijak rozumně využitelné v praktickém životě. Jako příklad může posloužit všem jistě dobře známá trojčlenka s přímou a nepřímou úměrností. Je to příklad, který v životě jde využít pro hodně situací. A i u něj žáci a studenti naráží na problémy typu „dva dělníci práci jistě nevykonají za poloviční dobu než jeden, vždyť si spolu budou vykládat, nebudou mít dostatek prostoru pro práci, nebudou mít potřebné množství vybavení, ...“, případně „když za jeden výrobek zaplatíme určitou sumu, za sto takových výrobků jistě zaplatíme méně, než stokrát víc, protože dostaneme množstevní slevu.“

Nutno uznat, že žáci v tomto mají často pravdu. Ve škole však mají tyto postupy a učivo svoje nenahraditelné místo, neboť učí žáky aplikovat na problém nějaký ověřený postup a vyřešit jej. S trochou nadsázky by se dalo říct, že ověřujeme, jestli žáci dokážou uvařit čaj (tedy přečíst si nějaký postup a aplikovat jej). Učivo rovněž procvičuje jejich schopnosti myšlení a psychickou kondici podobně jako v posilovně zvedáním činek zlepšujeme naši fyzickou kondici. A přitom zvedání činky je podobně „nesmyslné a bez přímého praktického užítku“ jako řešení některých školních příkladů. A stejně jako v posilovně nemá smysl jako začátečník sahat hned po nejtěžších činkách, i ve škole postupujeme přes jednodušší (byť v praxi často méně použitelné) učivo k tomu těžšímu (a zajímavějšímu).

Na následujících řádcích se budeme zabývat šifrováním a kódováním. Pojmy, které sice pravděpodobně znáte, ale možná jste se ještě nikdy nestihli zamyslet nad tím, jak velký význam mají pro náš všední život a kde se vlastně všude vyskytují. Kdo se nad touto otázkou dosud nezamyslel, má nyní příležitost. **Zkuste přijít na několik příkladů věcí, které jsou nějak zakódovány či zašifrovány, nebo které třeba musí mít nějaký určitý tvar, který splňuje některá stanovená kritéria.**

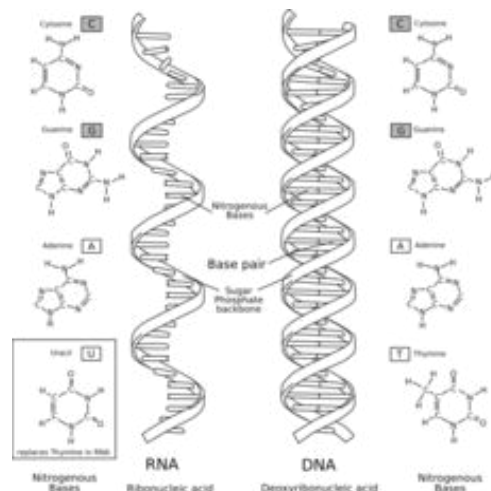
Podařilo se? Věřím, že něco jste jistě vymysleli. Nabízím následující možnosti: čárový kód na zboží v obchodech; IP adresy serverů; SMS letící vzduchem z vašeho mobilu; rodné číslo; SPZ automobilu; číslo bankovního účtu; signál placeného televizního vysílání; zpráva pro vašeho kamaráda nebo kamarádku, kterou nechcete, aby přečetl někdo jiný; depeše poslaná telegrafem jako změř teček a čárek; DNA v každé buňce vašeho těla.



Která z těchto šifer či kódů je podle vás nejsložitější?

Ano, správně, je to ten kód, který vymyslela sama příroda, tedy DNA. Od doby objevení struktury DNA uplynulo už více než půl století (1953, Watson a Crick). K úplnému rozšifrování však vědci mají stále velmi daleko. V této oblasti jsme vlastně pořád spíše na začátku. Přitom právě od pochopení kódu DNA si lidstvo slibuje velmi mnoho – od léčby různých nemocí, přes prodloužení délky života až po klonování či implementaci nadání člověka pro nějaké specifické odvětví. Od morálních dopadů těchto možností odhlédneme a soustředíme se nyní hlavně na samotný způsob kódování. Jak bylo řečeno, je velmi složitý. Ale proč? Pojdme si představit, že 46 chromozomů lidské DNA jsou jakési velmi obsáhlé svazky textu. Text mají pevně daný, je tvořen

pouhými čtyřmi znaky – tzv. nukleovými bázemi adeninem (A), cytosinem (C), guaninem (G) a thyminem (T). Jejich pořadí v řetězci DNA je pevně dané a pro konkrétního jedince neměnné (nebereme-li v úvahu mutace v průběhu života). Není velký problém zjistit pořadí těchto bází. Obrovský problém ale je zjistit jejich význam jako širších celků. Ten je totiž často ovlivněn strukturou DNA v naprosto jiném svazku nebo svazcích. Význam jednotlivých sekvencí („slov“) je různý podle toho, co se píše v mnoha jiných kapitolách nejen tohoto svazku, ale na mnoha místech i jiných svazků. Je to jako porozumět cizí řeči, ve které má slovo význam podle toho, jakým tónem ho osoba vysloví, jaký má u vyslovování postoj, nebo třeba jaká je zrovna venkovní teplota vzduchu. Teď už si asi dokážeme velmi hrubě představit, před jak těžkým úkolem se vědci, kteří se snaží rozšifrovat strukturu a porozumět obsahu DNA, nacházejí.



My si dáme o něco skromnější cíle – pokusíme se říct si něco o šifrách vytvořených lidmi, některé zkusit rozluštit a třeba sestavit nějakou svoji vlastní.

Použité obrázky:

Místo receptu čárový kód - ZDN [online]. ©2012 [cit. 2014-5-28]. Dostupné z:
<http://zdravi.e15.cz/denni-zpravy/z-domova/misto-receptu-carovy-kod-468173>

Čtečka mobilních čárových kódů [online]. ©2008 [cit. 2014-5-28]. Dostupné z:
<http://vh14.blogspot.cz/2008/10/teka-mobilnch-rovch-kd-pro-iphone.html>

Polymorfismy nukleových kyselin [online]. ©2014 [cit. 2014-5-28]. Dostupné z:
http://www.wikiskripta.eu/index.php/Polymorfismy_nukleov%C3%BDch_kyselin

Substituční šifry

Název je odvozen od slova *substitute* = *náhrada*. Půjde tedy o šifry, ve kterých bude nějaký znak nahrazen jiným (ale pokaždé stejným) znakem.

Asi nejjednodušší na tvorbu je metoda **posunuté abecedy** známá již z dob Gaia Julia Caesara (100 – 44 BC). Tato šifra spočívá v tom, že psaná slova mají jednotlivá písmenka nahrazena jinými, která jsou v abecedě o předem daný počet míst před nebo za písmenem, které nahrazujeme. Klíč je pak nejlepší psát do dvou řádků, kdy v jednom je abeceda původní a ve druhém je posunutá a hned tak vidíme, kterému písmenu přísluší to v šifře. Na rozluštění je pak právě dost nepříjemné zjišťovat, o kolik písmen a kterým směrem autor šifry posouval.

Příklad abecedy posunuté o 1 písmeno doprava:

původní	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
posunutá	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Rozluštěte následující šifry:

1) Szjsn uxozcz rheqz, ud jsdqd irnt urdbgmz ohrlmz onrtmtsz n idcmn ohrlmno cnoqzuz.

(Takto vypadá šifra, ve které jsou všechna písmena posunuta o jedno písmeno doprava.)

2) S qbql gplr mxh mfpbkx mlprkrqx l qof almoxx.

(V této jsou pak písmena posunuta o tři doprava.)

Rychlejší možnost rozluštění nabízí vystřihnutí dvou abeced v řádcích (podobně jak jsou uvedeny výše) a zkoušet je posouvat tak dlouho, dokud slova nedávají smysl. Další možností je pak tzv. **Albertiho kruh**. Skládá se vlastně ze dvou kruhů na společném středu a mohou se vzájemně otáčet. Na kružících jsou symboly nebo písmena a otáčením získáváme možnosti přiřazování. Pro lepší představu přidáváme následující schéma.



Velmi známým druhem šifry je **Morseova abeceda**. Každému písmenu i číslici je přiřazena určitá kombinace jedné až pěti teček nebo čárek. V historii hrála zásadní úlohu zejména při telegrafní komunikaci. A opět díky matematice a teorii kombinatoriky je nám jasné, proč nám na písmena abecedy stačí právě 1 až 4 tečky a čárky a ne třeba 1 až 3 a proč na číslice potřebujeme přidat ještě další znak. V psané podobě pak struktura vět vypadá tak, že jednotlivá písmena se oddělují svislou čarou | a slova pak dvěma svislými čarami ||. Kompletní přehled (včetně mnemotechnické pomůcky pro lepší připomenutí v podobě slova, u nichž podle délky slabik poznáme, kde je tečka a kde čárka) uvede následující tabulka.

písmeno	kód písmene	pomocná slova
A	· -	akát
B	- · · ·	blýskavice
C	- · · ·	cílovníci
D	- · ·	dálava
E	·	erb
F	· · · ·	filipíny
G	- · · ·	grónská zem
H	· · · ·	hrachovina
CH	- · · ·	chléb nám dává
I	· ·	ibis
J	· · · ·	jasmín bílý
K	- · ·	krákorá
L	· · · ·	lupíneček

písmeno	kód písmene	pomocná slova
M	- -	mává
N	- ·	nástup
O	- - -	ó náš pán
P	· - - ·	papírníci
Q	- - - ·	kvílí orkán
R	· - ·	rarášek
S	· · ·	sekera
T	-	trám
U	· · -	učení
V	· · · -	vyučení
W	· - -	vagón klád
X	- · · -	xénokratés
Y	- · · -	ý se ztrácí
Z	- · · ·	známá žena

číslo	kód čísla
1	· - - - -
2	· · - - -
3	· · · - -
4	· · · · -
5	· · · · ·

číslo	kód čísla
6	- · · · ·
7	- - · · ·
8	- - - · ·
9	- - - · -
0	- - - - -

Zkuste vyluštit následující šifry:

3) -- | --- | .- | ... | . | --- | -.- | .- || -. | . | -. | .. || -. | .. | .--- | .- | -.- || - | . | --- | -.- | .- ||

(Morseovka není nijak těžká.)

4) 82 | 31 | 771 | 4 | 666 || 2 | 3 | 6143 | 7 | 212 || 36 || 4185 | 74 | 363 | 1 | 814 || 7233 |
4411 | 9 || 3467 | 228 | 538 | 2679 | 33 | 8 || 4 | 121 | 5 | 6715 | 78 || 171 | 716 | 613 | 92 ||
58 || 3857 | 77 | 8888 | 72 || 2587 | 99 | 999 | 1433 | 54 ||

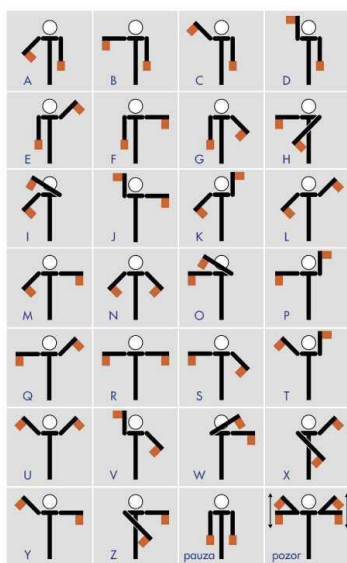
(Místo teček a čárek lze použít třeba sudá a lichá čísla.)

5) 66 | 811 | 12 | 85 || 1284 | 63 | 3411 | 74 | 3371 | 84 | 6213 | 4117 | 457 || 734 | 1753 | 8517 |

233 || 6185 | 2614 | 8 | 285 | 2 ||

(Nebo kombinace více druhu.)

Kromě Morseovy abecedy byla vyvinuta ještě další možnost kódování písmen pro vizuální přenos informací na dálku – tzv. **semaforová abeceda**. Písmena se kódují speciální pozicí paží vůči tělu. Pro lepší viditelnost byly často používány barevné praporky v rukou. Každé písmeno je reprezentováno jedním typem postoje, dá se tedy signalizovat rychleji, než již zmíněná Morseova abeceda. Následující obrázek ukáže přehled postojů a jejich význam.



Následující šifry spadají také do kategorie substitučních šifer, tentokrát ale bez bližšího návodu k vyřešení. **Zkuste si tedy procvičit svoji tvořivost a nápaditost.**

6)

(Staci mit jen spravny napad a sifra je najednou docela snadna.)

7)

7777 6 7777 1 9999 7 777 2 888 999 1 7777 33 1 3 777 444 888 33 1 7 7777 2 555
999 1 666 7 2 55 666 888 2 66 999 6 1 7777 8 444 7777 55 66 88 8 444 6 1 222 444
7777 555 2 1 66 2 1 55 555 2 888 33 7777 66 444 222 444 1 6 666 22 444 555 88

(SMS zpravy se dříve psaly opakovaným stisknutím čísla na klávesnici mobilu.)

Použité obrázky:

Math Circle [online]. ©2010 [cit. 2014-6-8]. Dostupné z:
<https://themathcircle.wordpress.com/nov-10/>

Semaforová abeceda [online]. ©2007 [cit. 2014-6-8]. Dostupné z:
http://dakota.skautkostelec.cz/skautska_stezka/praxe/semafor.htm

Transpoziční šifry

Název tohoto typu šifer je odvozen od slova *transpozice* = *změna polohy*. Tyto šifry mohou být typově velmi bohaté, stačí vymyslet způsob, jakým písmena přehodit nebo uspořádat, aby se text dal jednoduše zašifrovat a zároveň i rozluštit. Jako jednoduchý příklad může sloužit následující typy šifer.

8)

JAK OPR IKL ADN AMM UZE
SLO UZI TTA TOZ PRA VA,
VEK TER EJS OUP OUZ EJI
NAK UMI STE NEM EZE RYM
EZI JED NOT LIV YMI SLO
VY.

(Jako příklad nám může sloužit tato zpráva, ve které jsou pouze jinak umístěny mezery mezi jednotlivými slovy.)

9)

D L I O N S I E S T I M N S R D V D P V I O D U E O A K
A S M Z O T J P A P S E A T I A E O R N H A R H H R D U

(Další možností je psát písmena střídavě do prvního a druhého řádku.)

10)

JJSEOSKYZRVNPSMPJDOLVCRDIH EETHRIDZPAUAIEEOENTIIYHHCC

(Je ještě horší, když zprávu napíšeme po jednotlivých řádcích.)

11)

T T R Y Z E A O U U O U E N U B N R I H D T E
E Z A M E P T S P A Z S N E S Y A V P L P R
X P V U M S D L C R L T I M I T P N O E A N

(Text zprávy můžeme psát do sloupce a rozluštění nemusí být na první pohled patrné.)

12)

T	S	I	C	A	D	E	A
J	N	U	V	A	R	R	K
I	A	M	O	B	P	T	E
P	P	U	N	E	Z	S	N
A	S	Z	E	M	E	O	S
K	A	T	O	D	P	R	U
J	A	K	O	U	L	I	T

(Nebo muzeme zpravu napsat odprostred a cist ji pak jako ulitu sneka.)